

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**UM ESTUDO SOBRE A MODELAGEM DINÂMICA DE
CABOS ARTICULADOS A PLATAFORMAS MÓVEIS**

JÉSSICA MAFALDO DE CAMPOS

Dissertação apresentada à Comissão do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes

Rio Grande, 2016.

*Dedico este trabalho aos meus pais, João Alberto e Mara Rosana e ao meu irmão Rafael. A vocês devo tudo o que sei e tudo o que sou, agradeço por todo o amor, apoio e confiança.
Ao João Guilherme, pelo amor, companheirismo e compreensão a todo o momento.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes, pelo excelente trabalho. Agradeço pela dedicação, paciência, amizade, compreensão, colaboração e apoio ao longo desses dois anos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, pela oportunidade de realizar esta Dissertação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de recursos ao longo do desenvolvimento deste trabalho

Aos meus pais João Alberto e Mara Rosana, pelo amor incondicional, por terem sabido compreender o valor da educação e por terem sido meu alicerce, minha força e por tudo que abriram mão por mim.

Ao meu irmão Rafael por todo carinho, amor e apoio ao longo da minha vida.

Ao meu namorado João Guilherme pelo amor, amizade, companheirismo, carinho, apoio, atenção e principalmente pela compreensão.

A todos os meus amigos por estarem sempre presentes nos meus momentos bons e ruins.

Aos colegas Iaslei, Roberto, Thiago e Vanessa, pela convivência, pelas experiências trocadas, pelos momentos descontraídos e principalmente pelo incentivo ao longo da etapa que se encerra.

Aos membros da Banca Examinadora, avaliadores dessa Dissertação, pela honra de cada contribuição no aperfeiçoamento deste trabalho

Enfim, agradeço a todos que acreditaram no meu potencial, contribuindo assim por mais essa conquista.

RESUMO

Existem muitas aplicações de estruturas flexíveis do tipo cabo para o ambiente subaquático, principalmente correlatas à indústria de extração de petróleo. Cabos utilizados em veículos subaquáticos do tipo ROV (*Remotely Operated Vehicle*), cabos de amarração de plataformas flutuantes, de ancoragem ou reboque de embarcações, *risers*, constituem alguns exemplos. Estas estruturas flexíveis podem vir a ter quilômetros de comprimento, nos casos da extração de petróleo em águas profundas. A crescente utilização de cabos em aplicações subaquáticas tem despertado o interesse da comunidade científica para o desenvolvimento de pesquisas sobre a modelagem dinâmica de tais estruturas. A presente dissertação insere-se também nesse contexto, ou seja, soma-se ao esforço de se tentar modelar dinamicamente uma estrutura flexível do tipo cabo, considerando-o acoplado a outras dinâmicas, como uma plataforma flutuante e uma carga terminal, com dinâmicas próprias. Isto significa que tanto a carga terminal quanto a plataforma flutuante interagem com o cabo em um complexo acoplamento dinâmico, objeto principal do presente estudo. A ideia básica da modelagem dinâmica é supor o cabo formado por pequenos elos rígidos conectados por articulações fictícias elásticas que permitem movimentos de elevação, azimute e torção, de forma que sua dinâmica se desenvolve no espaço, em três dimensões. Utiliza-se o clássico formalismo de Euler-Lagrange em coordenadas angulares. Foram desenvolvidos manualmente modelos considerando-se o cabo aproximado por um, dois, três e quatro elos. Os elementos dos vetores e matrizes do modelo crescem muito com o aumento do número de elos. Foram identificados os padrões desse crescimento, os quais possibilitaram o desenvolvimento de algoritmos genéricos que permitem a geração automática dos modelos, para qualquer número de elos que se deseje aproximar a flexibilidade contínua do cabo por sua equivalente discreta. Não se dispõe ainda de um suporte experimental para a validação da modelagem dinâmica proposta. Porém, pelo menos qualitativamente, resultados de simulações mostraram-se coerentes com o comportamento fisicamente esperado do cabo. Visualizações destes resultados a partir de um software que permite animação em três dimensões indicaram uma boa sensação de realidade física, em todos os casos escolhidos para testes do modelo.

Palavras-chave: modelagem dinâmica, formalismo discreto, algoritmos genéricos, estruturas flexíveis, cabos subaquáticos.

ABSTRACT

There are many applications of flexible cable type for the underwater environment, mainly related to the oil extraction industry. Cables used in underwater ROV type vehicles (Remotely Operated Vehicle), mooring lines of floating platforms, anchoring or towing vessels, risers, are some examples. These flexible structures are likely to be kilometers long, in the case of oil extraction in deep water. The increasing use of cables in underwater applications has attracted the interest of the scientific community for the development of research on the dynamic modeling of such structures. The present dissertation is also part of this context, ie, adds to the effort to try dynamically modeling a flexible cable type, considering the coupled to other processes as a floating platform and a terminal load, with its own dynamic. This means that both the terminal load as the floating platform interact with the cable in a complex dynamic coupling, the main object of the present study. The basic idea of dynamic modeling is to assume the cable formed by small rigid links connected by elastic fictitious joints that allow elevation, azimuth and twist movements, so that its dynamic develops in three-dimensional space. It uses the classical formalism of Euler-Lagrange in angular coordinates. Manually models have been developed considering the approximate cable for one, two, three and four links. The elements of the vectors and the matrices of the model grow very with the increased number of links. Such growth patterns were identified that enabled the development of generic algorithms that allow the automatic generation of models for any number of links that want to approximate the continuous flexible cable for its discrete equivalent. There is no experimental support for the validation of the proposed dynamics modeling. However, at least qualitatively, simulation results were consistent with the expected physical cable behavior. Views these results from a software that allows animation in three dimensions indicated a good sense of physical reality in all cases chosen for model tests.

Key-words: dynamic modeling, discrete formalism, generic algorithms, flexible structures, underwater cables.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	8
LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS	11
LISTA DE ABREVIATURAS.....	12
LISTA DE FIGURAS	13
LISTA DE TABELAS	16
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	17
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	22
1.2 OBJETIVOS	37
1.2.1 OBJETIVOS GERAIS.....	37
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	37
1.3 ROTEIRO DO TRABALHO.....	38
CAPÍTULO II – FUNDAMENTOS TEÓRICOS	40
2.1 INTRODUÇÃO	41
2.2 FORMALISMO DISCRETO	41
CAPÍTULO III – MODELAGEM DINÂMICA	55
3.1 INTRODUÇÃO	56
3.2 MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DE UM ELO.....	56
3.3 MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DE DOIS ELOS.....	59
3.4 MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DE TRÊS ELOS	62
3.5 MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DE QUATRO ELOS	67
CAPÍTULO IV – FORÇAS NA CARGA TERMINAL.....	74
4.1 INTRODUÇÃO	75
4.2 FORÇAS EXTERNAS À CARGA TERMINAL.....	75
4.2.1 EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM CINCO ELOS.....	75
4.3 FORÇAS E TORQUES ATUANTES NO CORPO RÍGIDO	89
4.3.1 EQUACIONAMENTO PARA O CABO COM UM ELO.....	89
4.3.2 EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS.....	97
CAPÍTULO V – ALGORITMOS GENÉRICOS	102
5.1. ALGORITMO GENÉRICO PARA A MATRIZ DE INÉRCIA.....	103
5.2 ALGORITMO GENÉRICO PARA AS MATRIZES DE CONSTANTES ELÁSTICAS E DE COEFICIENTES DE ATRITO	110
5.3 ALGORITMO GENÉRICO PARA O VETOR CORIOLIS-CENTRÍFOGOS	113
5.4 ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O VETOR DE TORQUES GRAVITACIONAIS	118

5.5	ALGORITMOS GENÉRICOS PARA AS FORÇAS NA CARGA TERMINAL	119
CAPÍTULO VI - SIMULAÇÕES		124
6.1	PRIMEIRA SITUAÇÃO – CARGA TERMINAL LIVRE.....	127
6.2	SEGUNDA SITUAÇÃO – CABO FIXO AO FUNDO DO OCEANO.....	134
6.3	TERCEIRA SITUAÇÃO – FORÇAS ATUANTES NA CARGA TERMINAL	138
6.3.1	FORÇAS ATUANTES NO REFERENCIAL INERCIAL	139
6.3.2	FORÇAS ATUANTES NO REFERENCIAL DO CORPO.....	146
6.4	CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS SIMULAÇÕES	154
6.5	ANÁLISE ESTÁTICA	154
6.5.1	CONTROLE PD	154
6.5.2	A CURVA CATENÁRIA.....	157
6.6	ANÁLISE SOBRE TENSÕES	164
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES		168
CAPÍTULO VIII – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		173
APÊNDICE A		178
APÊNDICE A.1		179
APÊNDICE A.2.....		181
APÊNDICE A.3.....		186
APÊNDICE A.4.....		195
APÊNDICE B.....		212
APÊNDICE B.1		213
APÊNDICE B.2		214

LISTA DE SÍMBOLOS

a_c	Altura de referência para a definição da energia potencial da carga terminal.
$a_i, i = 1, \dots, n$	Alturas de referência para a definição da energia potencial de cada elo.
C	Matriz de coeficientes de atrito da dinâmica do cabo.
$c_i, i = 1, \dots, n$	Coefficientes de atrito de cada articulação.
$C_{i,j}, i, j = 1, \dots, 5$	Componentes da matriz de coeficientes de atrito.
c_v	Coefficiente de arrasto hidrodinâmico.
E_c	Energia Cinética.
E_{cR}	Energia Cinética devida ao movimento de rotação.
E_{cT}	Energia Cinética devida ao movimento de translação.
E_P	Energia Potencial.
E_y	Módulo de Young (elasticidade do cabo).
$\vec{f}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}), \vec{F}$	Vetor Coriolis-centrífugos.
\vec{F}_{0i}	Força em cada elo.
\vec{F}_{c0}	Forças externas no referencial inercial aplicadas à carga terminal.
\vec{F}_c	Forças externas no referencial do corpo aplicadas à carga terminal.
\vec{F}_0	Forças externas transformadas para o referencial inercial aplicadas à carga terminal.
\vec{F}_j	Vetor força no referencial da última articulação.
g	Aceleração gravitacional.
$g_i, i = 1, \dots, 5$	Componentes do vetor gravitacional.
$\vec{g}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}), \vec{G}$	Vetor de esforços gravitacionais.
$h_i, i = 1, \dots, n$	Alturas.
$H_{0_1}, H_{0_2}, H_{1_2}$	Matrizes de transformações homogêneas.
$I_{R_{e_i}}$	Momentos de inércia relativos ao movimento de elevação dos elos.
$I_{R_{a_i}}$	Momentos de inércia relativos ao movimento de azimute dos elos.
I_{T_i}	Momentos de inércia devido ao movimento de torção dos elos.
$I(\vec{\theta}), I$	Matriz de inércia completa.

\vec{i}	Vetor unitário na direção horizontal.
$I_{i,j}, i, j = 1, \dots, 5$	Componentes da matriz de inércia.
\vec{j}	Vetor unitário na direção vertical.
\vec{k}	Vetor unitário na direção perpendicular às direções horizontal e vertical.
K	Matriz de constantes elásticas das articulações do cabo.
$k_{a_i}, k_{e_i}, k_{e_T}$	Constantes elásticas devidas aos ângulos de azimute, elevação e torção.
$K_{i,j}, i, j = 1, \dots, 5$	Componentes da matriz de constantes elásticas.
L	Lagrangeano do sistema físico.
l	Comprimento do cabo.
$l_i, i = 1, \dots, n$	Comprimento de cada elo.
M, M_1	Massa da primeira estrutura flutuante.
m_c	Massa da carga terminal.
$m_i, i = 1, \dots, n$	Massas dos elos.
m_e	Massa específica do cabo.
m_{ea}	Massa específica da água.
n	Número de elos.
$r_i, i = 1, \dots, n$	Raio de cada elo.
$\vec{r}_{0,m}$	Vetor distância entre a origem e a carga terminal.
$\vec{r}_{m,5}$	Vetor distância entre a carga terminal e a quinta articulação.
v	Vetor velocidades do veículo no referencial do corpo.
t	Tempo.
\vec{T}_m	Vetor de torques externos.
\vec{u}_5	Vetor unitário na direção do quinto elo.
$u(t)$	Força externa aplicada na primeira estrutura flutuante.
$\tau_i, i = 1, \dots, n$	Torque em cada articulação.
$\vec{\tau}_c$	Torque produzido pelas forças sobre a carga terminal.
$\vec{\tau}_{cr}$	Torque produzido pela carga terminal na última articulação escrito no referencial do corpo.
$\vec{\tau}_{ca}$	Torque produzido pela carga terminal na última articulação escrito no referencial da articulação.
$\tau_{a_i}, \tau_{e_i}, \tau_{T_i}$	Torques em azimute, elevação e torção nas articulações.
τ_{ac}, τ_{ec}	Torques em azimute e elevação na última articulação provocados pela carga terminal.
τ_{au}, τ_{eu}	Torques de azimute e elevação na última articulação.

$\vec{\tau}_a$	Vetor de forças e momentos de massa adicional.
$\vec{\tau}$	Forças e momentos de propulsão.
$\vec{\tau}_m$	Vetor de torques motores.
$\vec{\tau}_r$	Vetor de toques resistentes.
ρ	Densidade Linear do cabo

LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

$\alpha_i, i = 1, \dots, n$	Ângulo entre o vetor unitário e o vetor de Força em cada elo.
β	Parâmetro definido para o algoritmo do vetor Coriolis-centrífugo.
$\vec{\mu}_{i-1,i}, i = 1, \dots, n$	Vetor unitário na direção do elo que une as articulações $i - 1$ e i .
$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right)$	Derivada total em relação ao tempo.
$\frac{\partial L}{\partial \theta_{e_i}}, \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_i}}, \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_i}}$	Derivadas parciais do Lagrangeano.
$\theta_{a_i}, \theta_{e_i}, \theta_{T_i}$	Ângulos de azimute, elevação e torção de cada elo.
$\dot{\theta}_{a_i}, \dot{\theta}_{e_i}, \dot{\theta}_{T_i}$	Derivadas em relação ao tempo das posições em azimute, elevação e torção.
$\vec{\theta}$	Vetor de estado com todas as posições angulares dos elos.
$\dot{\vec{\theta}}$	Derivada primeira do vetor $\vec{\theta}$ em relação à t .
$\ddot{\vec{\theta}}$	Derivada segunda do vetor $\vec{\theta}$ em relação à t .
ρ	Massa específica do fluido.
$X_0 Y_0 Z_0$	Sistema no referencial inercial.
$X_i Y_i Z_i$	Sistema de referência com origem na articulação i .
(x_0, y_0, z_0)	Coordenadas do centro de massa da carga terminal.
(x_i, y_i, z_i)	Coordenadas do centro de massa do i -ésimo elo.

LISTA DE ABREVIATURAS

ROV	Remotely Operated Vehicle.
SPF	Sistemas de Produções Flutuantes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Plataformas petrolíferas. Fonte: http://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas	18
Figura 1.2. - Estrutura flexível e sua representação discreta	19
Figura 1.3 - Representação de um cabo acoplado a uma plataforma flutuante	19
Figura 1.4 - Representação de um cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma de suas extremidades e com forças atuantes na carga terminal.	20
Figura 1.5 - Representação de um cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e fixo ao fundo do oceano na outra	21
Figura 2.1 - Representação esquemática do cabo umbilical, articulado a uma plataforma móvel.....	42
Figura 2.2 - Representação discreta da estrutura flexível contínua do cabo.	43
Figura 2.3 - Ângulos de azimute, elevação e torção para cada articulação.	44
Figura 2.4 - Representação esquemática dos sistemas de referência.	47
Figura 2.6 - Representação esquemática do cabo umbilical para a definição da energia potencial gravitacional	49
Figura 2.1 - Representação esquemática do cabo umbilical para a definição da energia potencial gravitacional.	49
Figura 2.5 - Representação esquemática do cabo umbilical para a definição da energia potencial gravitacional.	49
Figura 2.6 - Representação geométrica dos dois primeiros sistemas de referência.	51
Figura 3.1 - Representação esquemática para o cabo considerando-se um único elo.	56
Figura 3.2 - Representação esquemática para o cabo dividido em dois elos.....	59
Figura 3.3 - Representação esquemática para o cabo dividido em três elos.	63
Figura 3.4 - Representação esquemática para o cabo dividido em quatro elos.	67
Figura 4.1 - Representação geral para o cabo dividido em cinco elos.	76
Figura 4.2 - Representação dos vetores cujos seus módulos definem a distância entre a carga terminal e a quinta articulação.....	77
Figura 4.3 - Representação do vetor força F_{c0} e o vetor unitário $u_{5,m}$	80
Figura 4.4 - Representação dos torques em elevação e azimute.	88
Figura 4.5 - Representação dos referenciais do corpo e inercial.	90
Figura 4.6 - Representação dos atuadores.	91
Figura 4.7 - Representação da primeira rotação.	92
Figura 4.8 - Representação geral para o cabo dividido em três elos.	97
Figura 4.9 - Representação dos sistemas ao longo da cadeia, para o cabo com três elos.	98
Tabela 6.1 - Parâmetros físicos gerais adotados para os modelos dinâmicos.	126
Tabela 6.2 - Parâmetros adotados para as simulações da primeira situação.	127
Figura 6.1 - Primeira simulação da primeira situação: 22 elos; sem forças na plataforma móvel; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.	129
Figura 6.2 - Trajetória da carga terminal; sem forças aplicadas na plataforma móvel.	130
Figura 6.3 - Posição vertical da plataforma móvel; sem forças aplicadas na plataforma móvel.....	130

Figura 6.4 - Segunda simulação da primeira situação: 22 elos; com forças na plataforma móvel; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.....	133
Figura 6.5 - Trajetória da carga terminal; com forças aplicadas na plataforma móvel.	133
Figura 6.6 - Posição vertical da plataforma móvel; com forças aplicadas na plataforma móvel.....	134
Tabela 6.3 - Parâmetros adotados para as simulações da segunda situação.....	135
Figura 6.7 - Simulação da segunda situação: 14 elos; com forças na plataforma móvel.	137
Figura 6.8 - Posições angulares de elevação; com forças aplicadas na plataforma móvel.	137
Figura 6.9 - Posição vertical da plataforma móvel; com forças aplicadas na plataforma móvel.....	138
Figura 6.10 - Forças no referencial inercial: 22 elos; sem força na plataforma móvel.	141
Figura 6.11 - Trajetória da carga terminal; sem forças aplicadas na plataforma móvel.	141
Figura 6.12 - Posição vertical da plataforma móvel; sem forças aplicadas na plataforma móvel.....	142
Figura 6.13 - Forças no referencial inercial: 22 elos; com força na plataforma móvel.	144
Figura 6.14 - Trajetória da carga terminal; com forças aplicadas na plataforma móvel.	145
Figura 6.15 - Posição vertical da plataforma móvel; com forças aplicadas na plataforma móvel.....	145
Figura 6.16 - Forças no referencial do corpo: 16 elos; sem força na plataforma móvel; espaço tridimensional.....	147
Figura 6.17 - Forças no referencial do corpo: 16 elos; sem força na plataforma móvel; espaço bidimensional.	148
Figura 6.18 - Trajetória da carga terminal; sem forças aplicadas na plataforma móvel.	148
Figura 6.19 - Posição vertical da plataforma móvel; sem forças aplicadas na plataforma móvel.....	149
Figura 6.20 - Posições angulares de torção; sem forças aplicadas na plataforma móvel.	149
Figura 6.21 - Forças no referencial do corpo: 16 elos; com força na plataforma móvel; espaço tridimensional.....	151
Figura 6.22 - Forças no referencial do corpo: 16 elos; com força na plataforma móvel; espaço bidimensional.	152
Figura 6.23 - Trajetória da carga terminal; com forças aplicadas na plataforma móvel.	152
Figura 6.24 - Posição vertical da plataforma móvel; com forças aplicadas na plataforma móvel.....	153
Figura 6.25 - Posições angulares de torção; com forças aplicadas na plataforma móvel.	153
Figura 6.26 - Configuração estática final do cabo (escalas em m).	155
Figura 6.27 - Simulação para se chegar ao equilíbrio estático do cabo.....	156
Figura 6.28 - Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsf/for0203.htm	157
Figura 6.29 - Representação gráfica de um ponto do cabo.	158
Figura 6.30 - A Catenária	163

Figura 6.31 - Representação da Catenária.	163
Figura 6.32 - Comparação entre o resultado de uma simulação após o equilíbrio estático e a curva catenária.	164
Figura 6. 33 - Tensões nos elos, sem força aplicada na plataforma móvel.	166
Figura 6. 34 - Posição da plataforma móvel, sem a aplicação de força externa.	166
Figura 6. 35 - Tensões nos elos, com força aplicada na plataforma móvel.	167
Figura 6. 36 - Posição da plataforma móvel, sem a aplicação de força externa.	167

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 - Parâmetros físicos gerais adotados para os modelos dinâmicos.	126
Tabela 6.2 - Parâmetros adotados para as simulações da primeira situação.	127
Tabela 6.3 - Parâmetros adotados para as simulações da segunda situação.....	135

CAPÍTULO I
INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Atualmente tem surgido cada vez mais a necessidade de se desenvolver modelos dinâmicos de sistemas físicos para diversas aplicações tecnológicas e, em sua maior parte, estes modelos são não lineares e não permitem soluções analíticas.

O estudo de estruturas flexíveis do tipo cabo é um exemplo das situações mencionadas acima. O incentivo à realização dessas pesquisas, se deve às suas inúmeras aplicações subaquáticas, tais como nos Sistemas de Produções Flutuantes de Petróleo (sistemas constituídos por várias plataformas de produção), linhas de ancoragem, *risers* (tubos de ligações entre poços de petróleo no fundo do mar e plataformas, ou navios na superfície).

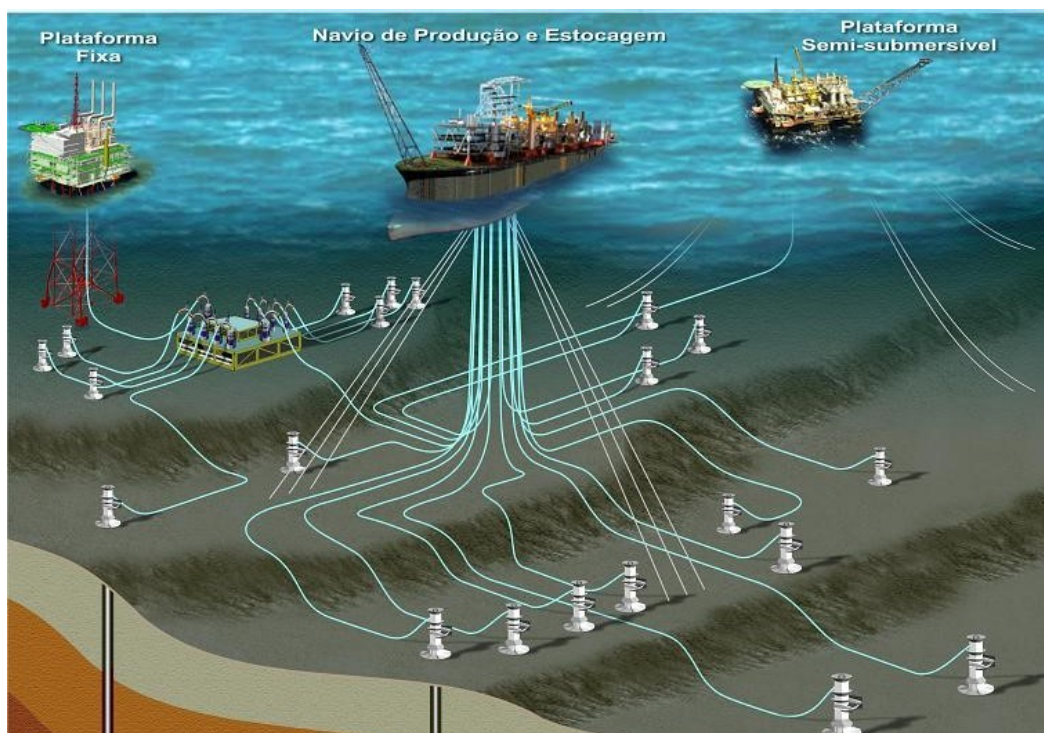


Figura 1.1 - Plataformas petrolíferas. Fonte: <http://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas>

Estas estruturas estão continuamente sujeitas às ações de esforços externos, tais como ondas oceânicas e correntes marítimas.

Para o desenvolvimento do modelo dinâmico de uma estrutura flexível do tipo cabo, será considerado o Método do Formalismo Discreto (PEREIRA [26]), que supõe

que o cabo é dividido em elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícias, conforme representado na Figura 1.2.

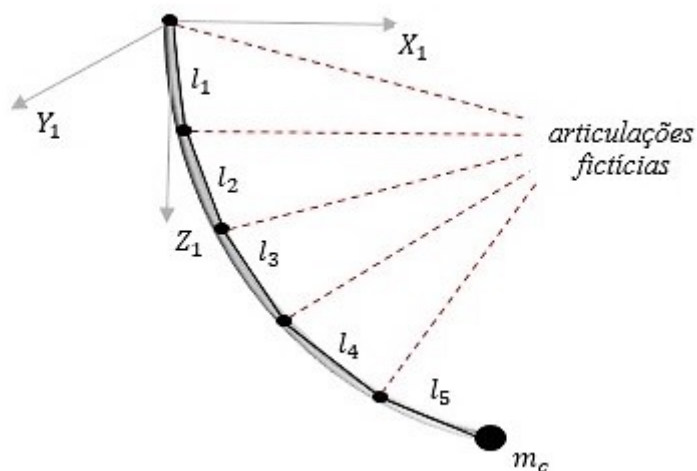


Figura 1.2. - Estrutura flexível e sua representação discreta

Cada uma dessas articulações permite três movimentos distintos no espaço tridimensional, movimentos de azimute, elevação e torção. Para a presente dissertação, será utilizada uma aproximação tridimensional para a dinâmica das estruturas flexíveis do tipo cabo. Porém, há uma complexidade maior em razão da base na qual se encontra acoplado o cabo ser flutuante, podendo esta movimentar-se na direção vertical (Figura 1.3).

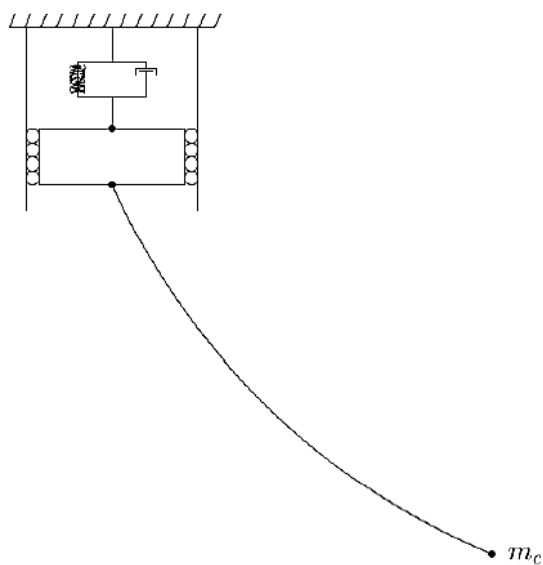


Figura 1.3 - Representação de um cabo acoplado a uma plataforma flutuante

Ressalta-se ainda a impossibilidade de desenvolvimento analítico do modelo dinâmico quando se considera um número maior de elos (acima de cinco, por exemplo), em razão do grande crescimento das equações à medida que se aumenta o número de elos rígidos presentes nestas estruturas, inviabilizando o desenvolvimento manual das equações do modelo dinâmico para além de um determinado número de elos (ZANELA [34]). Em razão desse crescimento das equações, foi necessário desenvolver algoritmos genéricos que permitem gerar de forma automática modelos dinâmicos, independentemente da quantidade de elos considerados para a representação discreta da flexibilidade contínua do cabo. Serão considerados ainda os casos nos quais atuam forças na carga terminal do cabo e ainda, o caso em que a extremidade final do cabo está fixa no fundo do oceano (Figuras 1.4 e 1.5).

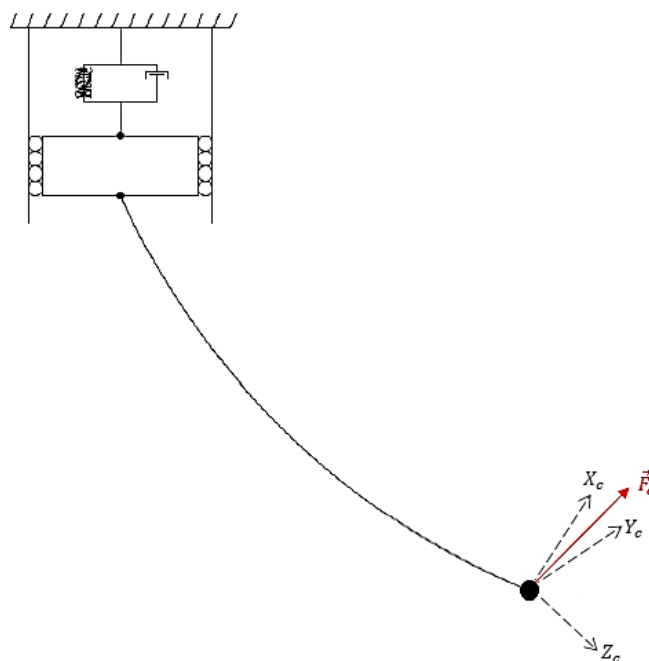


Figura 1.4 - Representação de um cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma de suas extremidades e com forças atuantes na carga terminal.

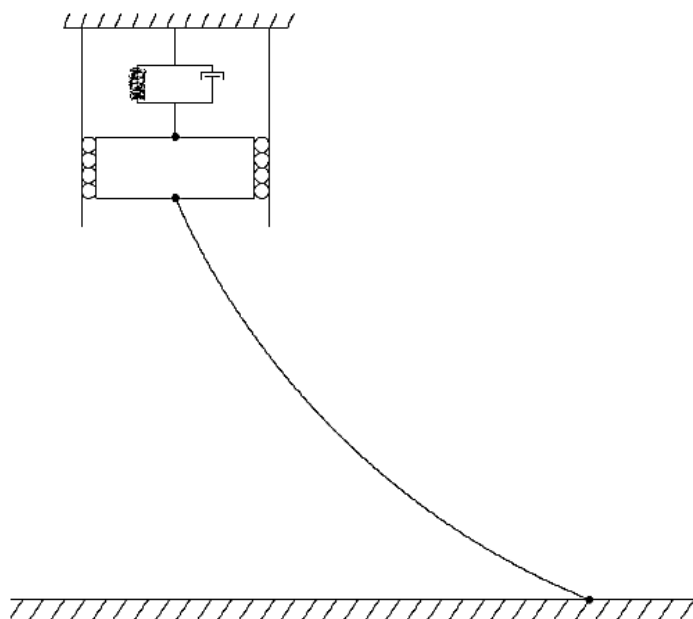


Figura 1.5 - Representação de um cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e fixo ao fundo do oceano na outra

Sendo assim, uma das principais colaborações deste trabalho consiste em desenvolver algoritmos genéricos, capazes de gerar o modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo de forma automática, para qualquer número de graus de liberdade, considerando-se o acréscimo de complexidade citado anteriormente (plataforma flutuante), permitindo gerar de maneira mais próxima à realidade física um modelo dinâmico, considerando-se o cabo inserido no meio oceânico. Em síntese, este processo de modelagem já foi desenvolvido por (ZANELA [34]), porém difere-se em considerar a plataforma flutuante nas extremidades, bem como o acréscimo de forças de vínculo na carga terminal do cabo.

A escolha pela utilização do Formalismo Discreto deu-se por sua simplicidade matemática e por não necessitar o uso de equações diferenciais parciais e condições de contorno quando comparado com outras técnicas de modelagem. No entanto, as equações obtidas são muito extensas. Contudo, com a determinação dos algoritmos genéricos, torna-se possível a geração automática dos modelos dinâmicos para qualquer número de elos considerados.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção apresenta resumos de trabalhos considerados durante a elaboração desta dissertação que de alguma forma contribuíram para o seu desenvolvimento.

Destaca-se que os trabalhos de (PEREIRA [25], [26]) foram os primeiros a abordar a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo utilizando o Formalismo Discreto. Neste estudo, o cabo foi dividido em partes rígidas, chamadas de elos, conectadas por articulações elásticas fictícias, utilizando o Formalismo de Euler-Lagrange. Porém, este estudo limitou-se a um cabo dividido em no máximo três elos, com as equações do seu modelo dinâmico obtidas de forma analítica.

Por conseguinte, (ZANELA [34]) abordou uma generalização a partir de algoritmos que permitem gerar os modelos dinâmicos para um número qualquer de elos no qual a estrutura do tipo cabo pode ser dividida, igualmente a partir do Formalismo Discreto. Também de forma analítica, foram obtidas as equações para o modelo dinâmico do cabo, considerando-se dois, três e quatro elos. Foram observados padrões de crescimento lógicos nas mesmas, à medida que o número de elos, no qual a divisão era feita, aumentava. A observação destes padrões de crescimento permitiu desenvolver os algoritmos citados.

Por fim, (POUZADA [27]) realizou um estudo no plano onde considerou a estrutura do tipo cabo acoplada a uma estrutura móvel, obtendo também, de forma analítica, equações para o modelo dinâmico do cabo. Neste trabalho também foram apresentadas formas de se considerar forças externas atuantes na carga terminal do cabo, restringindo-se, entretanto, a aplicações em um único plano vertical.

No entanto, a presente dissertação aborda o desenvolvimento genérico de modelos dinâmicos para estruturas flexíveis do tipo cabo, utilizando também o Formalismo Discreto citado anteriormente. Porém, contempla um estudo no espaço, onde analisa a plataforma flutuante nas extremidades, considerando, além da aplicação de forças atuantes na carga terminal do cabo, as perturbações externas do meio.

Apresentam-se a seguir breves descrições dos principais trabalhos utilizados durante a elaboração desta Dissertação:

- **F. A. Rochinha; R. Sampaio; P. Le Tallec (1990)**

O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais

Este artigo apresenta um modelo numérico para cabos umbilicais hiperelásticos que experimentem grandes deslocamentos e grandes rotações. O modelo mecânico resulta num sistema não-linear, resolvido por um método de decomposição-coordenação via Lagrangeano Aumentado, possibilitando a descrição do acoplamento existente entre flexão e torção em cabos submetidos a grandes deslocamentos.

- **M. A. Grosenbaugh; C. T. Howell; S. Moxnes (1993)**

Simulating the Dynamics of Underwater Vehicles with Low-tension Tethers.

Este artigo apresenta uma técnica numérica para calcular os movimentos bidimensionais de um veículo subaquático acoplado a um cabo. São apresentadas simulações da dinâmica de cabos que estão sob a ação de baixas tensões. Isto é possível devido à incorporação da rigidez de flexão nas equações do cabo, assim removendo as singularidades que ocorrem quando a tensão do cabo se torna nula. O artigo apresenta também resultados numéricos para diversas manobras do veículo acoplado.

- **E. L. Pereira (1999)**

Um Estudo Sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis.

Nesta dissertação foi desenvolvida e validada a técnica do Formalismo Discreto. Esta consiste em um estudo da modelagem dinâmica de uma estrutura flexível no plano, tratando-se de um manipulador robótico com um único elo flexível, sendo este elo articulado em uma extremidade e livre na outra. Neste formalismo, a estrutura foi dividida em duas, três e quatro partes rígidas, conectadas por articulações elásticas, permitindo movimento restrito ao espaço bidimensional.

- **E. L. Pereira (2010)**

O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo.

Na presente tese, investigou-se a interação fluido-estrutura de um cabo submerso em um fluido, considerando-se o acoplamento entre a modelagem dinâmica do cabo com o movimento do fluido. Na modelagem dinâmica do cabo criou-se um formalismo discreto, que tem como base o formalismo de Euler-Lagrange. O formalismo discreto é criado para a obtenção das equações de movimento de cabos umbilicais, divididos em elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícias e permitindo movimentos tridimensionais. Modelos dinâmicos de cabos foram gerados analiticamente para dois e três elos. Para o movimento do fluido, é proposto o escoamento sobre um cilindro circular, obtendo-se as soluções analíticas das equações de Navier-Stokes através do Método da decomposição de Adomian.

- **M. A. Vaz; M. H. Patel (1995)**

Transient Behaviour of Towed Marine Cables in Two Dimensions.

Este artigo apresenta uma solução numérica para o movimento transitório de cabos marinhos sendo rebocados de um navio com velocidade variável. O navio move-se de forma retilínea, tornando a dinâmica do cabo bidimensional. A metodologia consiste em dividir o cabo em n elementos, com as equações de equilíbrio e as compatibilidades geométricas satisfeitas em cada um dos mesmos. É montado um sistema de n equações diferenciais ordinárias não lineares, solucionado pelo método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordens, com a tensão axial calculada iterativamente, pois depende da solução. Os resultados são apresentados para as tensões no cabo e os ângulos de cada elemento são funções do tempo, para geometrias transitórias do cabo quando a velocidade de reboque é linear ou varia parabolicamente.

- **D. C. S. Cordovés (2008)**

Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais

Esta dissertação propõe um modelo para avaliar a confiabilidade estrutural do cabo umbilical, levando em consideração mecanismos de falha por escoamento e por fadiga mecânica. Esta análise é focada na avaliação estrutural das armaduras metálicas, dado que estes componentes suportam quase toda a carga à tração e limitam as deformações axiais da estrutura sem prejudicar significativamente a flexibilidade. A partir da formulação de um modelo de cabo umbilical, obtido pelo Método dos Elementos Finitos, determinou-se o histórico de tensões atuantes na estrutura, foram estimadas as funções de densidade de probabilidade da tensão estática e da tensão alternada corrigida para um curto e longo prazo, as quais caracterizam o carregamento atuante provocado pelas ondas do mar.

- **M. Nahon (1999)**

Dynamics and Control of a Novel Radio Telescope Antenna.

Este artigo apresenta um modelo matemático e computacional para um aeróstato, para suportar um receptor em uma antena telescópica de rádio. O modelo dinâmico considera o sistema como um conjunto de três ou mais correntes, fixas em pontos na Terra, que se unem em um ponto de junção, onde o receptor é localizado. Também acoplado no ponto de junção está uma correia presa no aeróstato em sua parte mais alta. O aeróstato providencia a força de elevação necessária para manter o sistema em cima, no alto. Nos pontos de fixação à Terra, guinchos mantêm as correntes no ponto de junção desejado. Para investigar o desempenho do sistema, as correntes e correia foram discretizadas em um dado número de elementos, utilizando o Formalismo Discreto. Os efeitos da rigidez do cabo, amortecimento interno, gravidade e arrasto aerodinâmico, assim como ventos e turbulências, foram inclusos no modelo. Um controlador foi então desenvolvido para controlar os comprimentos das correntes, respondendo aos erros de posição do receptor para uma posição desejada. O sistema completo foi formulado e resolvido numericamente.

- **J. I. Gobat; M. A. Grosenbaugh (2001)**

Application of the Generalized- α Method to the Time Integration of the Cable Dynamics Equations.

Neste artigo, para o estudo da dinâmica de um cabo, são analisados os problemas na integração temporal, definida pelo Método das Diferenças Finitas. É proposto um novo procedimento que mantém a discretização espacial do mesmo, empregando o Método Generalizado- α para a discretização temporal. São analisadas a estabilidade e a precisão deste método, considerando-se as equações da dinâmica do cabo.

- **S. C. P. Gomes; E. B. Zanela; A. E. L. Pereira**

Automatic Generation of Dynamic Models of Cables

Este artigo apresenta uma nova teoria para a modelagem dinâmica de cabos, com foco em aplicações subaquáticas. A ideia principal é aproximar a flexibilidade contínua do cabo por vários elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícios, permitindo três movimentos: elevação, azimute e torção.

- **E. B. Zanela (2013)**

Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas.

A presente dissertação considera o método do Formalismo Discreto para a modelagem dinâmica tridimensional de estruturas flexíveis do tipo cabo a partir do Formalismo de Euler-Lagrange. A estrutura flexível contínua é aproximada por uma equivalente discreta, formada por elos rígidos conectados por articulações fictícias elásticas. Cada articulação contém três graus de liberdade, permitindo movimentos de elevação, azimute e torção. O problema é que o tamanho das equações cresce muito com o aumento do número de graus de liberdade considerados para a dinâmica, tornando-se assim inviável a obtenção das equações do modelo dinâmico. Nesta dissertação a autora propôs algoritmos genéricos que permitem gerar de forma automática os modelos dinâmicos, independentemente do número de elos considerados. Foram realizadas

simulações com os modelos dinâmicos considerando-se diversos casos de números de elos e os resultados obtidos foram fisicamente consistentes.

- **C. C. Machado; A. E. L. Pereira; S. C. P. Gomes; A. L. de Bortoli (2002)**

Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis.

Neste artigo, foi proposto um novo algoritmo para determinar de forma simplificada as equações diferenciais da dinâmica de uma estrutura do tipo manipulador com um único elo flexível. Foram desenvolvidas funções de transferência analíticas para este problema específico, as quais são importantes para a validação do modelo discreto proposto na forma de um algoritmo. Este algoritmo foi desenvolvido para qualquer que seja o número de modos flexíveis considerados, além de introduzir modificações em relação ao Formalismo Discreto original, aumentando a precisão do modelo discreto. Ainda, é apresentado um estudo analítico, o qual foi de fundamental importância à validação do modelo discreto estudado.

- **M. R. de Assis (2012)**

Modelagem e Validação Experimental de uma Estrutura Flexível.

A presente dissertação teve como proposta a implementação e validação de um modelo matemático e experimental de uma viga flexível simplesmente engastada, que permitiu analisar as frequências naturais e modos de vibração, através de um protótipo montado em laboratório. O modelo analítico foi obtido através da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e o Formalismo de Lagrange. Para a discretização da solução analítica do modelo foi utilizado o Método dos Modos Assumidos.

- **W. Zhao; L. Chen; J. W. Zu (2005)**

A Finite Difference Method for Simulating Transverse Vibrations of an Axially Moving Viscoelastic String.

O Método das Diferenças Finitas é proposto para simular vibrações transversais em uma corda axial móvel. A partir da discretização da equação governante e da equação da relação tensão-fadiga em diferentes nós, sistemas de duas equações são obtidos. As duas discretizações por diferenças finitas podem ser feitas alternadamente, aumentando a eficiência computacional. O método numérico facilita o trabalho com o modelo não linear, apresentando boa estabilidade para valores iniciais pequenos. São apresentados exemplos numéricos para mostrar a eficiência e a estabilidade do algoritmo, e é feita uma análise dinâmica da corda visco elástica a partir dos resultados numéricos obtidos.

- **L. R. dos Santos (2007)**

Modelagem Não Linear da Dinâmica de Cabos Submarinos.

Esta tese baseia-se na teoria do contínuo introduzida por Cosserat para descrever a dinâmica de estruturas unidimensionais flexíveis como os cabos marinhos. No modelo mecânico utilizado, a estrutura é descrita por um mapeamento definido pela posição espacial dos pontos materiais pertencentes a uma curva, definida como a linha dos centróides do corpo. Para resolver a equação de evolução no tempo da estrutura, que é não linear, é utilizado um código numérico que preserva as constantes fundamentais para obtenção do movimento. A fim de apresentar a técnica utilizada para a análise dinâmica destas estruturas, são apresentadas algumas simulações de cabos que, partindo de uma configuração inicial de equilíbrio, passam a ser excitados pelo movimento da plataforma e pelo perfil de corrente marinha, com o intuito de verificar a estabilidade e a precisão numérica do algoritmo.

- **C. C. Machado (2007)**

Modelagem Matemática e Controle Ativo de um Manipulador com um Elo flexível.

A presente tese de doutorado propõe o desenvolvimento de um controle ativo de um manipulador com um elo flexível. Para a resolução do problema de modelagem, a autora utilizou o conceito de formalismo discreto (*lumped mass approach*) para obtenção das equações diferenciais da dinâmica, buscando aproximar a flexibilidade contínua por uma discreta adotando-se um número finito de modos flexíveis e articulações fictícias, ou seja, a estrutura flexível é aproximada por uma equivalente discreta. Compensações de atrito no modelo são feitas com algoritmos que utilizam Rede Neural e Lógica Fuzzy. Os controles por alocação de polos e LQG / LTR (*Linear Quadratic Gaussian / Loop Transfer Recovery*) são testados a partir de simulações, além de resultados experimentais.

- **Guo; Y. Xu; H. Li (2007)**

Dynamic Performance of Cable-stayed Bridge Tower with Multi-stage Pendulum Mass Damper Under Wind Excitations – I: Theory.

Neste artigo é investigado o controle de vibrações induzidas pelo vento em uma coluna de uma ponte suspensa, a partir de um pêndulo multifásico de amortecimento. Primeiro, o modelo a partir do Método dos Elementos Finitos da ponte durante a sua construção e a equação do movimento do pêndulo são introduzidos. A equação do movimento da ponte com o pêndulo sob a excitação pelo vento é estabelecida. Finalmente, uma simulação numérica e estudos paramétricos são conduzidos para analisar a efetividade do sistema de controle, com a finalidade de reduzir a vibração induzida pelo vento nas colunas da ponte durante a sua construção. Os resultados da simulação numérica mostraram que o pêndulo é prático e efetivo para reduzir estas vibrações e pode ser instalado em uma pequena área da coluna, obedecendo às mesmas características de variação no tempo da ponte, durante todo o período de construção da mesma.

- **Luongo; D. Zulli; G. Piccardo (2008)**

Analytical and Numerical Approaches to Nonlinear Galloping of Internally Resonant Suspended Cables.

Este trabalho estuda cabos suspensos sujeitos a ressonâncias crescentes. Um modelo de viga curva geometricamente não linear e passível de girar é utilizado para esta abordagem, considerando forças aerodinâmicas, incluindo o efeito do balanço estático e torção dinâmica da seção transversal. São aplicados métodos de solução, como diferenças finitas e a discretização espacial de Galerkin, seguidos pela integração numérica no tempo e discretização espacial de Galerkin em conjunto com a análise de perturbações em múltiplas escalas. Ao fim, resultados qualitativos e quantitativos são comparados entre si.

- **S. Chang; J. Park; K. Lee (2008)**

Nonlinear Dynamic Analysis of Spatially Suspended Elastic Catenary Cable with Finite Element Method.

Este trabalho investiga o comportamento dinâmico de um cabo, considerando as não linearidades geométricas devidas ao efeito de flacidez, baseando-se na teoria do cabo catenário elástico. Equações para as condições de compatibilidade de um cabo catenário são obtidas, sob a ação de múltiplos carregamentos concentrados sobre um único elemento. O peso próprio e outros tipos de carregamento distribuído impostos sobre um elemento são discretizados com carregamentos concentrados. As forças internas são avaliadas diretamente a partir das equações de compatibilidade e da matriz de flexibilidade. A verificação é feita a partir de um experimento, testando a vibração livre de um cabo de suspensão, e o comportamento dinâmico do mesmo é comparado com o elemento de viga do *software* ABAQUS, onde excitações tridimensionais de suporte são impostas.

- **Omurtag; W. W. Lytton (2010)**

Spectral Method and High-order Finite Differences for the Nonlinear Cable Equation.

Este trabalho utiliza aproximações de alta ordem para as derivadas espaciais na equação do cabo não linear e investiga o comportamento dos erros presentes nas soluções numéricas a partir do uso de soluções exatas disponíveis. São mostradas comparações com soluções exatas em um cabo não ramificado, a convergência de soluções com refinamento progressivo da malha de diferenças finitas e uma simulação de um modelo biofísico aplicado a uma rede neural.

- **F. J. Sun; Z. H. Zhu; M. LaRosa (2010)**

Dynamic Modeling of Cable Towed Body Using Nodal Position Finite Element Method.

Este artigo trata da dinâmica não linear de sistemas de cabos de reboque. A modelagem do cabo foi feita através do Método dos Elementos Finitos, com uma nova posição nodal, calculando diretamente a posição do cabo, em vez do deslocamento do mesmo, pelo método existente. A modelagem do corpo rebocado é feita a partir do corpo rígido com seis graus de liberdade. O acoplamento do cabo com o corpo rebocado é feito posteriormente, enquanto que a dinâmica do navio rebocador é tratada externamente ao sistema. A análise numérica dos resultados demonstrou robustez, em comparação com a metodologia pré-existente.

- **G. R. di Marzo (2010)**

Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais.

Esta dissertação aplica metodologias de análises de tensões induzidas em cabos de sinal de cabos umbilicais, utilizando o Método dos Elementos Finitos. O autor avalia as tensões induzidas em condutores de sinal, acoplando ao fluxo magnético originado das correntes dos circuitos de potência do cabo umbilical. A metodologia utilizada é a partir

das técnicas de fatiamento e transposição para a geometria do cabo, em conjunto ao acoplamento com o circuito elétrico. As simulações são feitas para situações bidimensionais e tridimensionais.

- **E. B. Antunes (2010)**

Modelagem e Simulação de Estruturas Flexíveis - Cabos e Placas.

Esta dissertação trata da modelagem de sistemas dinâmicos, partindo da chamada formulação forte e passando pelo conceito da formulação variacional. Apresenta ainda outra abordagem, que trabalha com aproximações por discretização de sistemas contínuos, especialmente pelos métodos dos resíduos ponderados. Ao fim, compara as duas formas de modelagem.

- **V. K. Srivastava; S. Yvss; M. Tamsir (2011)**

Dynamic Behavior of Underwater Towed-cable in Linear Profile.

Neste trabalho, uma aproximação numérica é apresentada com a capacidade de predição do comportamento dinâmico de estruturas do tipo cabo de reboque subaquático, quando o navio rebocador altera a sua velocidade em uma direção fixa, mantendo um perfil linear. Um modelo tridimensional de sistemas de reboque subaquáticos é estudado. As equações governantes do sistema são solucionadas utilizando-se o Método das Diferenças Finitas. A solução em diferenças finitas das equações algébricas não lineares é obtida a partir do Método de Newton. Como o modelo de cabo subaquático rebocado utiliza uma integração implícita no tempo, é estável para grandes passos de tempo e é um algoritmo efetivo para simulações de grande escala.

- **C. A. M. Nascimento (2011)**

Modelagem Numérica de Vibrações em Cabos de Transmissão de Energia Elétrica.

Esta monografia apresenta a modelagem pelo Método dos Elementos Finitos de um cabo de transmissão de energia. Utilizando o *software* ANSYS para realizar as simulações, o modelo busca retratar os cabos utilizados na bancada de ensaios de cabos do Laboratório de Fadiga e Integridade Estrutural de Cabos Condutores de Energia da Universidade de Brasília. A metodologia consiste em realizar simulações para os casos de um cabo ou uma viga bi apoiada, sob a ação de uma força externa em diferentes pontos e o caso de um cabo sob a ação de tensões, para encontrar as respostas dinâmicas do sistema e suas frequências naturais.

- **M. D. Masciola; M. Nahon; F. R. Driscoll (2012)**

Static Analysis of the Lumped Mass Cable Model using a Shooting Algorithm.

Este artigo estuda um método de solução para a configuração estática em um sistema de um cabo discretizado. Tal método é utilizado prioritariamente para realizar simulações dinâmicas do cabo, sendo generalizado o suficiente para a maioria das configurações que o mesmo pode assumir. As forças agindo no cabo podem ser atribuídas à sua elasticidade, peso, flutuância e hidrodinâmica. Para o problema tridimensional, as configurações iniciais do mesmo são obtidas resolvendo-se três equações, independentemente da sua solução discretizada. Esta análise também discute regiões e circunstâncias nas quais as falhas do método são encontradas.

- **Z. Fang; Q. He; B. Xiang; H. Xiao; K. He; Y. Du (2012)**

A Finite Element Cable Model and Its Applications Based on the Cubic Spline Curve.

Este artigo trata da deformação sofrida por cabos de reboque, utilizando o Método dos Elementos Finitos para aproximar a representação dos efeitos de torção e flexão sofridos pelos mesmos. A obtenção das equações do movimento parte de um método dos

resíduos ponderados, posteriormente sendo utilizado o *software* MATLAB® para a validação dos resultados obtidos. Este modelo pode ser aplicado para uma análise dinâmica de cabos oceânicos, tais como cabos de reboque e cabos umbilicais para um ROV (*Remotely Operated Vehicle*).

- **Y. Liu; Z. Qian; K. Xia (2013)**

Mechanical Response of Transmission Lines Based on Sliding Cable Element.

Este artigo trata as características de deslizamento de cabos, quando são conectados com outros fios em estruturas de redes de transmissão. A formulação de Lagrange e a curva catenária são utilizadas para considerar os coeficientes de rigidez. Como exemplos de verificação, foram utilizados cabos com dois e três vãos. Os resultados obtidos em simulações foram satisfatórios, especialmente se comparados com os existentes na literatura.

- **G. Bi; S. Zhu; J. Liu; X. Fang; L. Wang (2013)**

Dynamic Simulation and Tension Compensation Research on Subsea Umbilical Cable Laying System.

Este artigo analisa cabos umbilicais subaquáticos, a partir de estudos de tensão, utilizando o Método dos Elementos Finitos para corpos rígidos para discretizar e transformar o sistema em um acoplamento flexível e rígido. É apresentado o modelo matemático de cabos umbilicais subaquáticos, a partir da Equação de Lagrange de Segunda Ordem aplicada nas junções entre um elemento do cabo e o próximo. A modelagem dinâmica e as simulações são feitas através do *software* ADAMS. Os resultados mostraram que as perturbações originadas no cabo, sob a ação de ondas do mar, causam flutuações significativas nas tensões do mesmo. O controle compensativo de tensões evita tais flutuações.

- **B. P. Rocha (2013)**

Modelagem Matemática de Cabos Umbilicais e Veículos Subaquáticos Não Tripulados.

Esta dissertação aborda a modelagem dinâmica de veículos subaquáticos não tripulados do tipo ROV (*Remotely Operated Vehicle*), incluindo a dinâmica do cabo umbilical. Para tal, é proposto um formalismo para acoplar as dinâmicas do cabo e do ROV, partindo do modelo cinemático do mesmo e tratando a flexibilidade contínua do cabo aproximada de forma discreta. Entretanto, não há generalização da dinâmica do cabo, que foi considerada com no máximo seis elos. Estes elos rígidos são conectados por articulações fictícias, permitindo movimentos elásticos de azimute, elevação e torção, tornando o ROV a carga terminal do cabo e este, por sua vez, possuindo dinâmica própria. As simulações realizadas posteriormente mostraram resultados fisicamente esperados.

- **P. Pathote (2014)**

Efficient Mathematical Model for Prestressing Cables and Its Implementation in Computer Analysis.

Este artigo apresenta uma nova técnica de modelagem matemática de cabos protendidos, utilizando a curva *b-spline*. Anteriormente, os cabos eram modelados com formas parabólicas, no entanto, o formato real do cabo nesta situação é o de uma curva suave. A implementação deste novo método foi feita através da análise por elementos finitos, utilizando o elemento Lagrangeano de três nós unidimensionais para o cabo. Esta formulação utilizou fundamentos de cálculo vetorial, e as reações no cabo foram obtidas por análises nodais através do Método dos Elementos Finitos, considerando os efeitos de atrito e rigidez do cabo. Um *software* de elementos finitos foi desenvolvido incorporando estas características. Com isto, várias vigas de concreto protendido foram analisadas e validadas.

- **T. A. Pouzada (2015)**

Algoritmo Genérico para a Geração Automática de Modelos de Cabos em Três Situações Práticas de Aplicações Subaquáticas.

A presente dissertação considera o método do Formalismo Discreto para a modelagem dinâmica plana de estruturas flexíveis do tipo cabo a partir do Formalismo de Euler-Lagrange. Considera a situação em que os cabos representem três casos distintos. No primeiro e no segundo, com uma das extremidades articulada a uma estrutura flutuante (navio ou plataforma), enquanto que em sua outra extremidade, uma carga terminal fica livre no primeiro caso e fixa ao fundo do oceano no segundo. No terceiro caso, as duas extremidades do cabo são articuladas a duas estruturas flutuantes distintas. Foram desenvolvidos algoritmos genéricos, para gerar automaticamente as equações dos modelos dinâmicos para qualquer número de elos desejado, em cada um dos três casos considerados. Uma vez obtidos estes algoritmos, foram realizadas simulações, com a finalidade de verificar qualitativamente os resultados obtidos. Um *software* para a animação gráfica foi desenvolvido e a sua utilização permitiu atestar uma grande sensação de realidade físicas nas simulações, cujos resultados, em diversas situações, mostraram-se de acordo com o esperado fisicamente.

- **V. S. de Oliveira (2016)**

Algoritmos Genéricos para a Geração de Modelos Dinâmicos de Cabos Umbilicais de Veículos Subaquáticos

Esta dissertação de mestrado considera que a modelagem dinâmica de estruturas do tipo cabo é feita a partir da formulação de Euler-Lagrange. Tem como principal objetivo conceber os meios para se acoplar as duas dinâmicas (cabo e carga terminal), de forma a possibilitar análises sobre a influência de uma carga terminal com dinâmica própria, sobre a dinâmica do cabo. O modelo dinâmico consiste em dividir o cabo em pequenos elos conectados por articulações fictícias flexíveis, permitindo movimentos em elevação, azimute e torção. O cabo está articulado a uma estrutura flutuante em uma extremidade e com uma massa m_c na outra extremidade (ROV), onde estão sendo aplicadas forças externas. Um estudo sobre a influência dessas forças na dinâmica do cabo foi realizado visando um padrão de crescimento das equações à medida que se aumenta o número de elos para representar de

forma discreta a flexibilidade contínua do cabo. Este padrão identificado permitiu o desenvolvimento de algoritmos genéricos, geradores do modelo global (cabo e carga terminal com dinâmica própria) para um número qualquer de elos escolhidos para a dinâmica do cabo, sendo esta a principal contribuição da presente dissertação. Como não se dispõe de um aparato experimental, as simulações foram analisadas apenas de forma qualitativa e, em todos os casos analisados, os resultados foram conforme o esperado fisicamente. Um software que permite uma animação 3D foi desenvolvido para facilitar a visualização e a análise das simulações. As animações 3D permitiram concluir que a movimentação do cabo confere uma boa sensação de realidade física, principalmente quando se trabalha com um grande número de elos na representação da flexibilidade do cabo.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVOS GERAIS

A presente dissertação possui como objetivo geral o desenvolvimento de algoritmos genéricos, a partir da obtenção de equações gerais, que permitam gerar de forma automática o modelo dinâmico no espaço para estruturas flexíveis do tipo cabo acoplado a plataformas móveis, de acordo com a quantidade de elos nos quais se deseja aproximar a flexibilidade contínua do cabo por uma equivalente discreta.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Primeiramente realizar pesquisas na literatura a respeito de trabalhos e contribuições que abordem técnicas distintas de modelagem dinâmica para estruturas flexíveis do tipo cabo, tais como o Método dos Elementos Finitos e o Método da Formulação Discreta.

Realizar uma análise do comportamento de crescimento nas matrizes e nos vetores do modelo dinâmico, considerando os casos onde a estrutura flexível do tipo cabo for

dividida em um, dois, três e quatro elos, a fim de se determinar padrões de crescimento das equações que possibilitem desenvolver algoritmos genéricos, que sejam capazes de gerar automaticamente o modelo dinâmico do cabo para n elos.

Uma vez desenvolvidos esses algoritmos genéricos, os algoritmos serão implementados utilizando-se o *software* MATLAB® para a realização de diversas simulações, cujos resultados são analisados qualitativamente, a fim de se avaliar a consistência das características físicas das respostas dinâmicas dos modelos.

1.3 ROTEIRO DO TRABALHO

Esta dissertação está dividida em seis capítulos. O presente Capítulo trata da introdução geral, contendo explicações sobre o assunto da pesquisa, bibliografias existentes na área, contribuições e objetivos a serem alcançados.

No Capítulo II apresentam-se os fundamentos teóricos para o desenvolvimento do modelo dinâmico de estruturas flexíveis do tipo cabo, a partir da abordagem discreta e do Formalismo de Euler-Lagrange.

O Capítulo III aborda a modelagem dinâmica para os casos em que o cabo é dividido em um, dois, três e quatro elos.

No Capítulo IV serão obtidas as forças inerciais nas carga terminal, onde serão obtidos torques originados em cada articulação fictícia e as forças originadas em cada elo e também as forças de vínculo na carga terminal.

O Capítulo V trata das equações gerais para a formação dos elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico. Neste capítulo são desenvolvidos os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico com um número n de elos, no qual o cabo pode ser dividido.

No Capítulo VI apresentam-se resultados de simulações utilizando-se o modelo gerado a partir dos algoritmos genéricos. Serão simulados três casos: carga terminal em queda livre; cabo articulado a uma plataforma flutuante em uma extremidade e fixo no fundo do oceano na outra extremidade; forças aplicadas à carga terminal.

O Capítulo VII apresenta as conclusões e considerações finais. Finalmente, no Capítulo VIII serão apresentadas as referências bibliográficas.

O Apêndice A, em suas subdivisões A.1, A.2, A.3 e A.4, apresenta, respectivamente, as equações dos elementos das matrizes e vetores para um, dois, três e quatro elos nos quais o cabo é dividido, desenvolvidos no Capítulo III.

No Apêndice B, em suas subdivisões B.1 e B.2, apresentam-se as equações adicionais dos elementos do vetor de esforços externos, a partir da determinação dos torques nas articulações, para os casos desenvolvidos no Capítulo IV.

CAPÍTULO II
FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2. ABORDAGEM DISCRETA PARA ESTRUTURAS FLEXÍVEIS DO TIPO CABO

2.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo, será apresentada, a partir da formulação de Euler-Lagrange, a modelagem matemática para a dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo, acoplada a uma estrutura móvel em sua extremidade superior e livre na outra, onde será posicionada uma carga de massa m_c .

As equações da dinâmica são obtidas a partir desta abordagem discreta, considerando que o cabo (estrutura contínua) esteja dividido em partes rígidas (elos) e conectados por elementos flexíveis, denominados de articulações elásticas fictícias (PEREIRA[25]).

2.2 FORMALISMO DISCRETO

Considera-se um cabo umbilical articulado a uma estrutura flutuante na sua extremidade superior e livre na outra, onde será colocada uma carga de massa m_c , conforme ilustra a Figura 2.1.

Existem diversas aplicações envolvendo estruturas flexíveis do tipo cabo, que ocorrem principalmente em sistemas subaquáticos, como por exemplo, cabos umbilicais de ROV (*Remotely Operated Vehicle*), cabos de ancoragem de navios, de amarraduras de plataforma de petróleo, cabos para reboque de embarcações, *risers*, etc.

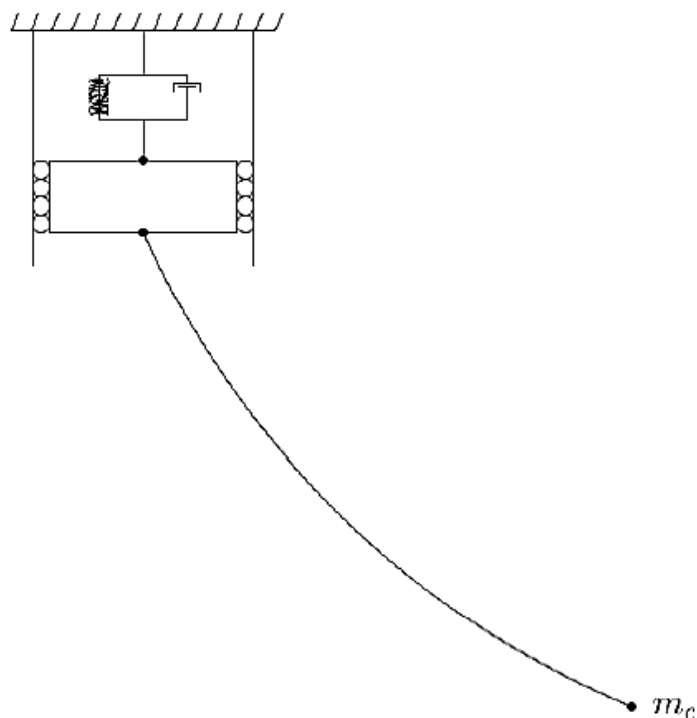


Figura 2.1 - Representação esquemática do cabo umbilical, articulado a uma plataforma móvel.

Tendo em vista que os cabos podem realizar dois tipos de movimentos no espaço, movimentos de rotação e translação, faz-se necessário estabelecer transformações entre os sistemas de coordenadas (ISOLDI [14]). No caso de um cabo fixo em sua extremidade superior, é importante conhecer a orientação e posição da sua extremidade livre (carga terminal) que podem ser obtidas a partir de sucessivas rotações e translações entre os diversos sistemas de referência, convenientemente posicionados ao longo da cadeia de corpos rígidos, poli articulados, que representa a flexibilidade contínua do cabo.

A principal ideia para a realização do método de modelagem é dividir o cabo em pequenos elementos, chamados de elos, conectados por articulações fictícias flexíveis que permitem movimentos em três graus de liberdade, denominados por azimute, elevação e torção (ZANELA [34]). Estes movimentos são relativos ao elo anterior da cadeia articulada (PEREIRA [26]).

Cada uma das articulações fictícias consideradas possui natureza elástica e, sendo assim, é necessário contemplar as constantes elásticas com seus respectivos coeficientes de amortecimento, constituindo-se assim a natureza física de cada articulação. Para identificar a posição da extremidade livre do cabo, é imprescindível um sistema de coordenadas em cada uma das articulações. Desta forma, os sistemas de referência são

posicionados em cada articulação, a fim de permitir o uso de transformações homogêneas para relacioná-los.

Em suma, com a obtenção do formalismo discreto é possível determinar o Lagrangeano do sistema de forma algorítmica, independentemente do número de elos utilizados para representar a estrutura flexível contínua do cabo.

Na modelagem discreta, um cabo de flexibilidade contínua é dividido em n partes rígidas de comprimentos $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, que são chamados de elos, sendo estes elos conectados por articulações fictícias, como mostra a Figura 2.2.

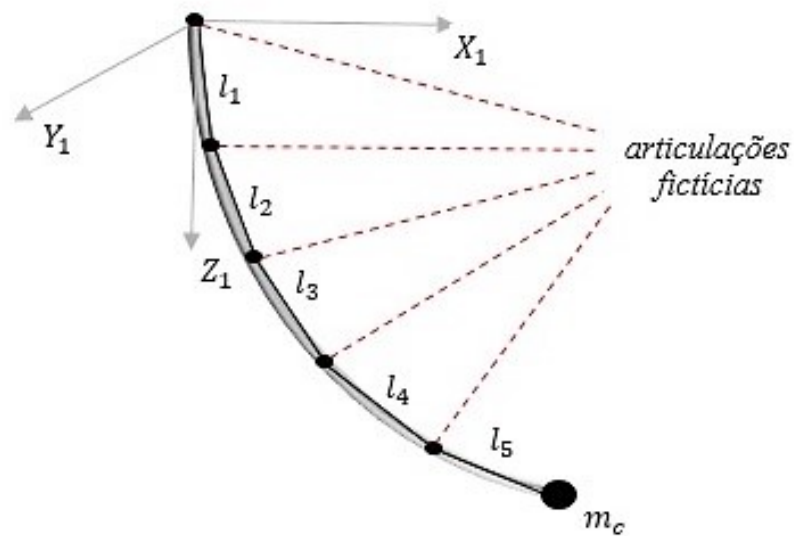


Figura 2.2 - Representação discreta da estrutura flexível contínua do cabo.

Os elos possuem massas concentradas nos seus centros de massa, ou seja, $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \dots, (x_n, y_n, z_n)$, que são as coordenadas dos centros de massa dos elos que possuem massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, respectivamente, enquanto (x_c, y_c, z_c) são as coordenadas de centro de massa da carga terminal m_c . Em cada articulação são considerados os ângulos de azimute, elevação e torção do cabo. Logo, na i -ésima articulação, $\theta_{a_i}, \theta_{e_i}$ e θ_{T_i} são, nesta ordem, ângulo de azimute, ângulo de elevação e ângulo de torção do cabo, conforme a Figura 2.3 a seguir:

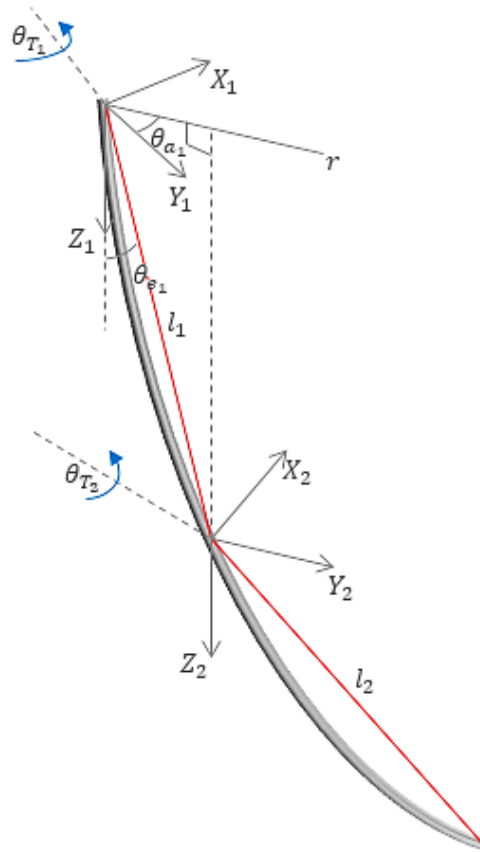


Figura 2.3 - Ângulos de azimute, elevação e torção para cada articulação.

No referencial X_i, Y_i, Z_i , tem-se que: o eixo $O_i Z_i$ é paralelo ao eixo OZ_0 do referencial inercial (sempre no sentido vertical), o eixo $O_i Y_i$ é paralelo à projeção da parte rígida anterior à i -ésima articulação (projeção no plano horizontal) e o eixo $O_i X_i$ é ortogonal ao eixo $O_i Y_i$.

Em cada articulação são consideradas três constantes elásticas, ou seja, na i -ésima articulação são consideradas as constantes elásticas k_{a_i} , k_{e_i} e k_{T_i} , devido aos ângulos de azimute, elevação e torção, respectivamente.

A energia cinética é definida como:

$$E_C = E_{C_R} - E_{C_T} \quad (2.1)$$

onde E_{C_R} é a energia cinética devida ao movimento de rotação e E_{C_T} é a energia cinética devida ao movimento de translação do cabo.

A energia cinética rotacional deve-se ao movimento de rotação de cada elo em torno do seu centro de massa, definida por:

$$\begin{aligned}
 E_{C_R} = & \frac{1}{2} I_{R_{e_1}} \dot{\theta}_{e_1}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{e_2}} \dot{\theta}_{e_2}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{e_3}} \dot{\theta}_{e_3}^2 + \cdots + \frac{1}{2} I_{R_{e_n}} \dot{\theta}_{e_n}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{a_1}} \dot{\theta}_{a_1}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} I_{R_{a_2}} \dot{\theta}_{a_2}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{a_3}} \dot{\theta}_{a_3}^2 + \cdots + \frac{1}{2} I_{R_{a_n}} \dot{\theta}_{a_n}^2 + \frac{1}{2} I_{T_1} \dot{\theta}_{T_1}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} I_{T_2} \dot{\theta}_{T_2}^2 + \frac{1}{2} I_{T_3} \dot{\theta}_{T_3}^2 + \cdots + \frac{1}{2} I_{T_n} \dot{\theta}_{T_n}^2
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $\theta_{e_1}, \theta_{e_2}, \theta_{e_3}, \dots, \theta_{e_n}$ são os ângulos de elevações nas articulações, $\theta_{a_1}, \theta_{a_2}, \theta_{a_3}, \dots, \theta_{a_n}$ são os ângulos de azimute, $I_{R_{e_1}}, I_{R_{e_2}}, I_{R_{e_3}}, \dots, I_{R_{e_n}}$ são os momentos de inércia rotacionais relativos aos movimentos de elevação nas articulações e $I_{R_{a_1}}, I_{R_{a_2}}, I_{R_{a_3}}, \dots, I_{R_{a_n}}$ são os momentos de inércia rotacionais relativos aos movimentos de azimute, $I_{T_1}, I_{T_2}, I_{T_3}, \dots, I_{T_n}$ são os momentos de inércia relativos aos movimentos de torção e $\theta_{T_1}, \theta_{T_2}, \theta_{T_3}, \dots, \theta_{T_n}$ são os ângulos de torção nas articulações. Observa-se que as parcelas de energia cinética rotacional devidas aos movimento de azimute e elevação poderiam ser omitidas. De fato, a energia cinética de translação é muito mais significativa que a energia cinética de rotação e, geralmente, dá-se mais ênfase à energia cinética de translação neste tipo de formalismo. Considerou-se ainda que os momentos de inércia rotacionais devido aos movimentos de azimute são constantes, por aproximação. Esta aproximação simplifica em muito o equacionamento e pode ser considerada porque se trata de uma parcela muito menor do que a parcela relativa à energia cinética de translação.

A energia cinética devida ao movimento de translação do cabo é definida por:

$$\begin{aligned}
 E_{C_T} = & \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \\
 & + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \cdots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) + \\
 & + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} M \dot{z}_m^2
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2)$, $\frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)$, $\frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2)$, \dots , $\frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2)$ e $\frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2)$ são as energias cinéticas relativas aos

movimentos das massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ dos elos e da massa m_c da carga, respectivamente e $\frac{1}{2}M\dot{z}_m^2$ é a energia cinética de translação da plataforma móvel.

A energia potencial possui parcelas elástica e gravitacional, sendo definida na forma:

$$\begin{aligned}
 E_P = & \frac{1}{2}k_{e_1}\theta_{e_1}^2 + \frac{1}{2}k_{e_2}(\theta_{e_2} - \theta_{e_1})^2 + \frac{1}{2}k_{e_3}(\theta_{e_3} - \theta_{e_2})^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2}k_{e_n}(\theta_{e_n} - \theta_{e_{(n-1)}})^2 + \frac{1}{2}k_{a_1}\theta_{a_1}^2 + \frac{1}{2}k_{a_2}(\theta_{a_2} - \theta_{a_1})^2 \\
 & + \frac{1}{2}k_{a_3}(\theta_{a_3} - \theta_{a_2})^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2}k_{a_n}(\theta_{a_n} - \theta_{a_{(n-1)}})^2 + \frac{1}{2}k_{T_1}\theta_{T_1}^2 + \frac{1}{2}k_{T_2}(\theta_{T_2} - \theta_{T_1})^2 \\
 & + \frac{1}{2}k_{T_3}(\theta_{T_3} - \theta_{T_2})^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2}k_{T_n}(\theta_{T_n} - \theta_{T_{(n-1)}})^2 + \frac{1}{2}k_m z_m + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \\
 & + m_3 g h_3 + \dots + m_n g h_n
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $k_{e_1}, k_{e_2}, k_{e_3}, \dots, k_{e_n}$ são as constantes elásticas nas articulações relativas aos ângulos de elevação $\theta_{e_1}, \theta_{e_2}, \theta_{e_3}, \dots, \theta_{e_n}$; $k_{a_1}, k_{a_2}, k_{a_3}, \dots, k_{a_n}$ são as constantes elásticas nas articulações relativas aos ângulos de azimute $\theta_{a_1}, \theta_{a_2}, \theta_{a_3}, \dots, \theta_{a_n}$; $k_{T_1}, k_{T_2}, k_{T_3}, \dots, k_{T_n}$ são as constantes elásticas nas articulações relativas aos ângulos de torção $\theta_{T_1}, \theta_{T_2}, \theta_{T_3}, \dots, \theta_{T_n}$; $\frac{1}{2}k_m z_m$ é a energia potencial elástica na plataforma móvel; $m_1 g h_1, m_2 g h_2, m_3 g h_3, \dots, m_n g h_n$ são as energias potenciais gravitacionais de cada elo, sendo $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ as alturas que serão definidas individualmente posteriormente. A energia potencial gravitacional que atua sob a plataforma pode ser desconsiderada, pois a mesma tem a força peso igual ao empuxo.

Então, o Lagrangeano do sistema é definido por:

$$L = E_C - E_P \tag{2.5}$$

As coordenadas dos centros de massa dos elos e da carga terminal são determinadas a partir de transformações homogêneas entre os diversos sistemas de

referência. A primeira articulação fictícia é colocada na junção do cabo com a plataforma móvel, ponto no qual se considera a origem do primeiro sistema de referência não inercial, como mostra a Figura 2.4 a seguir:

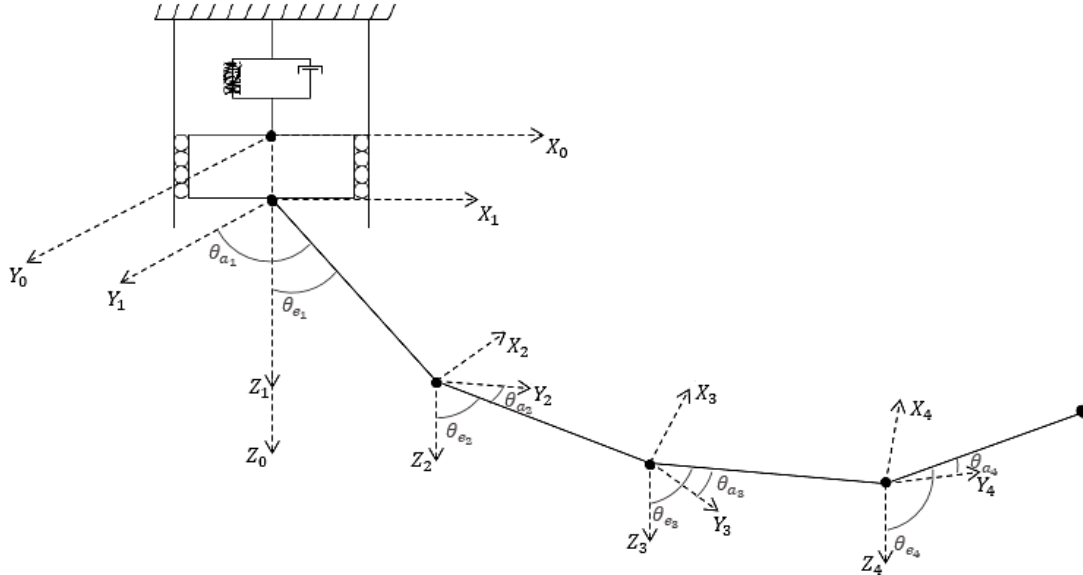


Figura 2.4 - Representação esquemática dos sistemas de referência.

onde $x_0 y_0 z_0$ é o sistema referencial inercial (posicionado com origem no nível médio do mar), e $x_i y_i z_i$, com $i=1, 2, 3, \dots, n$, são os sistemas referenciais móveis em cada articulação fictícia.

As matrizes de transformações homogêneas consideram translações e rotações em azimute entre a origem $x_0 y_0 z_0$ e cada sistema referencial móvel. Isto se deve ao fato de todos os sistemas possuírem planos XY horizontais. A partir destas transformações, as coordenadas dos centros de massa de cada elo podem ser obtidas de forma sistemática. Para maiores explicações e detalhes a respeito das transformações homogêneas, os trabalhos (PEREIRA [25], [26]) e (ZANELA [34]) podem ser consultados.

Considerando-se o cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e livre na outra, conforme mostra a Figura 2.4, a energia cinética de translação, considerando a equação (2.3) e o grau de liberdade acrescido devido à plataforma móvel, é definida por:

$$E_{CT} = \frac{1}{2} M \dot{z}_m^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) + \\
 & \quad + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2)
 \end{aligned}$$

onde M é a massa da plataforma móvel, \dot{z}_m é a velocidade do centro de massa desta estrutura na direção vertical e $\frac{1}{2} M \dot{z}_m^2$ é a energia cinética relativa ao movimento da massa M .

Considerando-se a equação (2.4), define-se a energia potencial na forma:

$$\begin{aligned}
 E_P = & \frac{1}{2} k_m z_m^2 + \frac{1}{2} k_{e_1} \theta_{e_1}^2 + \frac{1}{2} k_{e_2} (\theta_{e_2} - \theta_{e_1})^2 + \\
 & + \frac{1}{2} k_{e_3} (\theta_{e_3} - \theta_{e_2})^2 + \dots + \frac{1}{2} k_{e_n} (\theta_{e_n} - \theta_{e_{(n-1)}})^2 + \frac{1}{2} k_{a_1} \theta_{a_1}^2 + \\
 & \quad + \frac{1}{2} k_{a_2} (\theta_{a_2} - \theta_{a_1})^2 + \frac{1}{2} k_{a_3} (\theta_{a_3} - \theta_{a_2})^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2} k_{a_n} (\theta_{a_n} - \theta_{a_{(n-1)}})^2 + \frac{1}{2} k_{T_1} \theta_{T_1}^2 + \frac{1}{2} k_{T_2} (\theta_{T_2} - \theta_{T_1})^2 + \\
 & \quad + \frac{1}{2} k_{T_3} (\theta_{T_3} - \theta_{T_2})^2 + \dots + \frac{1}{2} k_{T_n} (\theta_{T_n} - \theta_{T_{(n-1)}})^2 + \\
 & \quad + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + m_3 g h_3 + \dots + m_n g h_n
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ressalta-se que a energia potencial gravitacional de massa M não é considerada pois a mesma é flutuante e o seu peso é igual ao seu empuxo. Considera-se ainda a massa M da estrutura como fixa a uma mola e a um amortecedor, de forma a poder simular um eventual movimento harmônico oriundo, por exemplo, de ondas na superfície do mar. $\frac{1}{2} k_m z_m^2$ é a energia potencial elástica da estrutura flutuante, sendo k_m a constante elástica e z_m o deslocamento do centro de massa da mesma na direção vertical; $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ são as alturas com relação aos níveis de mínima energia, definidas neste caso por:

$$\begin{aligned}
 h_1 & = -z_m + H_1 = -z_m + \frac{l_1}{2} (1 - \cos \theta_{e_1}) \\
 h_2 & = -z_m + H_1 + H_2 = -z_m + H_1 + \frac{l_2}{2} (1 - \cos \theta_{e_2}) \\
 h_3 & = -z_m + H_1 + H_2 + H_3 = -z_m + H_1 + H_2 + \frac{l_3}{2} (1 - \cos \theta_{e_3}) \\
 & \quad \vdots
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$h_n = -z_m + \sum_{i=1}^{n-1} H_i + H_n = -z_m + \sum_{i=1}^{n-1} H_i + \frac{l_n}{2}(1 - \cos \theta_{e_n})$$

onde $H_1 = \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_{e_1})$, $H_2 = \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_{e_2})$, $H_3 = \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_{e_3})$ e $H_n = \frac{l_n}{2}(1 - \cos \theta_{e_n})$, conforme ilustra a Figura 2.5 seguinte:

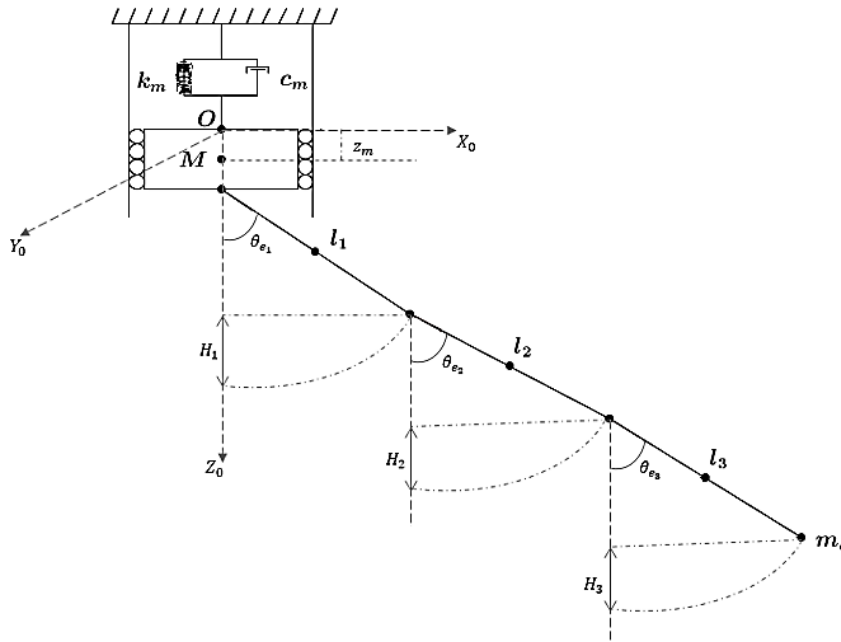


Figura 2.5 - Representação esquemática do cabo umbilical para a definição da energia potencial gravitacional.

Para este caso, de (2.2), (2.6), (2.7), (2.8) e das definições de H_n , obtém-se o Lagrangeano do sistema na forma:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} I_{R_{e_1}} \dot{\theta}_{e_1}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{e_2}} \dot{\theta}_{e_2}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{e_3}} \dot{\theta}_{e_3}^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{R_{e_n}} \dot{\theta}_{e_n}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{a_1}} \dot{\theta}_{a_1}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} I_{R_{a_2}} \dot{\theta}_{a_2}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{a_3}} \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{R_{a_n}} \dot{\theta}_{a_n}^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}_m^2 + \\
 & + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \\
 & + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) +
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) - \frac{1}{2} k_m z_m^2 - \frac{1}{2} k_{e_1} \theta_{e_1}^2 + \\
 & - \frac{1}{2} k_{e_2} (\theta_{e_2} - \theta_{e_1})^2 - \frac{1}{2} k_{e_3} (\theta_{e_3} - \theta_{e_2})^2 - \dots + \\
 & - \frac{1}{2} k_{e_n} (\theta_{e_n} - \theta_{e_{(n-1)}})^2 - \frac{1}{2} k_{a_1} \theta_{a_1}^2 - \frac{1}{2} k_{a_2} (\theta_{a_2} - \theta_{a_1})^2 + \\
 & - \frac{1}{2} k_{a_3} (\theta_{a_3} - \theta_{a_2})^2 - \dots - \frac{1}{2} k_{a_n} (\theta_{a_n} - \theta_{a_{(n-1)}})^2 + \\
 & - \frac{1}{2} k_{T_1} \theta_{T_1}^2 - \frac{1}{2} k_{T_2} (\theta_{T_2} - \theta_{T_1})^2 - \frac{1}{2} k_{T_3} (\theta_{T_3} - \theta_{T_2})^2 + \\
 & - \dots - \frac{1}{2} k_{T_n} (\theta_{T_n} - \theta_{T_{(n-1)}})^2 - m_1 g \left[-z_m + \frac{l_1}{2} (1 - \cos \theta_{e_1}) \right] + \\
 & - m_2 g \left[-z_m + l_1 (1 - \cos \theta_{e_1}) + \frac{l_2}{2} (1 - \cos \theta_{e_2}) \right] + \\
 & - m_3 g \left[\begin{array}{c} -z_m + l_1 (1 - \cos \theta_{e_1}) + l_2 (1 - \cos \theta_{e_2}) + \\ + \frac{l_3}{2} (1 - \cos \theta_{e_3}) \end{array} \right] + \\
 & - \dots - m_n g \left[-z_m + \sum_{i=1}^{n-1} l_i (1 - \cos \theta_{e_i}) + \frac{l_n}{2} (1 - \cos \theta_{e_n}) \right]
 \end{aligned}$$

Analisando-se a Figura 2.6 conclui-se que as coordenadas do centro de massa do primeiro elo (l_1) são:

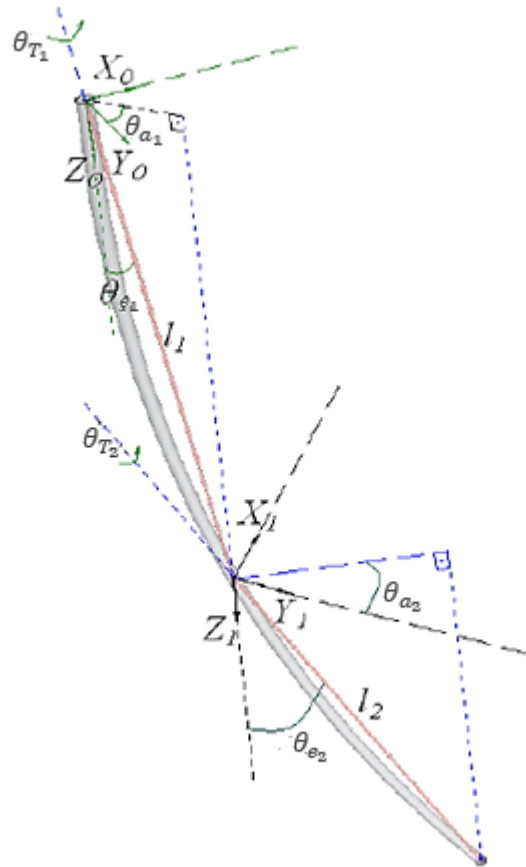


Figura 2.6 - Representação geométrica dos dois primeiros sistemas de referência.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2} \text{sen } \theta_{e_1} \text{ sen } \theta_{a_1} \\ y_1 = \frac{l_1}{2} \text{sen } \theta_{e_1} \text{ cos } \theta_{a_1} \\ z_1 = z_m + \frac{l_1}{2} \text{cos } \theta_{e_1} \end{cases} \quad (2.10)$$

As coordenadas do centro de massa do segundo elo (l_2) são:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{l_2}{2} \text{sen } \theta_{e_2} \text{ sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + l_1 \text{sen } \theta_{e_1} \text{ sen } \theta_{a_1} \\ y_2 = \frac{l_2}{2} \text{sen } \theta_{e_2} \text{ cos}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + l_1 \text{sen } \theta_{e_1} \text{ cos } \theta_{a_1} \\ z_2 = z_m + \frac{l_2}{2} \text{cos } \theta_{e_2} + l_1 \text{cos } \theta_{e_1} \end{cases} \quad (2.11)$$

À medida que se consideram novos elos na modelagem, as coordenadas dos centros de massa destes seguem o mesmo padrão de crescimento. Logo, generalizando estas equações, é possível obter as coordenadas do centro de massa da k -ésima parte rígida na qual o cabo é dividido, e as coordenadas do centro de massa da carga terminal, respectivamente, como sendo:

$$\begin{cases} x_k = \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j \operatorname{sen} \theta_{e_j} \operatorname{sen} \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \right] + \frac{l_k}{2} \operatorname{sen} \theta_{e_k} \operatorname{sen} \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \\ y_k = \sum_{j=1}^{k-1} \left[l_j \operatorname{sen} \theta_{e_j} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \right] + \frac{l_k}{2} \operatorname{sen} \theta_{e_k} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \\ z_k = z_m + \sum_{j=1}^{k-1} (l_j \cos \theta_{e_j}) + \frac{l_k}{2} \cos \theta_{e_k} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} x_c = \sum_{j=1}^n \left[l_j \operatorname{sen} \theta_{e_j} \operatorname{sen} \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \right] \\ y_c = \sum_{j=1}^n \left[l_j \operatorname{sen} \theta_{e_j} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \right] \\ z_c = z_m + \sum_{j=1}^n l_j \cos \theta_{e_j} \end{cases} \quad (2.13)$$

Portanto, das equações (2.12) e (2.13) e do fato que os ângulos variam no tempo, obtêm-se as derivadas destas coordenadas em relação ao tempo t , que são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_k = \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[\text{sen } \theta_{e_j} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_j} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_j} \right] + \\ \quad + \frac{l_k}{2} \left[\text{sen } \theta_{e_k} \cos \left(\sum_{i=1}^k \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_k} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^k \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_k} \right] \\ \dot{y}_k = \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[-\text{sen } \theta_{e_j} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_j} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_j} \right] + \\ \quad + \frac{l_k}{2} \left[-\text{sen } \theta_{e_k} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^k \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_k} \cos \left(\sum_{i=1}^k \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_k} \right] \\ \dot{z}_k = \dot{z}_m - \sum_{j=1}^{k-1} l_j \text{sen } \theta_{e_j} \dot{\theta}_{e_j} - \frac{l_k}{2} \text{sen } \theta_{e_k} \dot{\theta}_{e_k} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_c = \sum_{j=1}^n l_j \left[\text{sen } \theta_{e_j} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_j} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_j} \right] \\ \dot{y}_c = \sum_{j=1}^n l_j \left[-\text{sen } \theta_{e_j} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_j} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_j} \right] \\ \dot{z}_c = \dot{z}_m - \sum_{j=1}^n l_j \text{sen } \theta_{e_j} \dot{\theta}_{e_j} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Então, de (2.9), (2.14) e (2.15), obtém-se a forma geral do Lagrangeano:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \quad (2.16)$$

onde:

$$L_1 = \frac{1}{2} M \dot{z}_m^2 + \sum_{b=1}^n \left\{ \frac{1}{2} I_{R_{e_b}} (\dot{\theta}_{e_b})^2 + \frac{1}{2} I_{R_{a_b}} (\dot{\theta}_{a_b})^2 + \frac{1}{2} I_{T_b} \dot{\theta}_{T_b}^2 \right. \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}K_{e_b} [\theta_{e_b} - \theta_{e_{(b-1)}}]^2 - \frac{1}{2}K_{a_b} [\theta_{a_b} - \theta_{a_{(b-1)}}]^2 + \\
 & -\frac{1}{2}K_{T_b} [\theta_{T_b} - \theta_{T_{(b-1)}}]^2 - \frac{1}{2}k_m z_m^2 + \\
 & -m_b g \left[\sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2}(1 - \cos \theta_{e_b}) \right] \Big\} \\
 L_2 = & \sum_{b=1}^n \frac{m_b}{2} \left\{ \frac{l_b}{2} \left[\text{sen } \theta_{e_b} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_b} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^b \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_b} \right] + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[\text{sen } \theta_{e_j} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_j} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_j} \right] \right\}^2 \\
 L_3 = & \sum_{b=1}^n \frac{m_b}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{b-1} l_j \left[-\text{sen } \theta_{e_j} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_j} \cos \left(\sum_{i=1}^j \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_j} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{l_b}{2} \left[-\text{sen } \theta_{e_b} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^b \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_b} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_b} \right] \right\}^2 \\
 L_4 = & \sum_{b=1}^n \frac{m_b}{2} \left\{ n \cdot \dot{z}_m - \sum_{j=1}^{b-1} l_j \text{sen } \theta_{e_j} \dot{\theta}_{e_j} - \frac{l_b}{2} \text{sen } \theta_{e_b} \dot{\theta}_{e_b} \right\}^2 \\
 L_5 = & \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^n l_b \left[\text{sen } \theta_{e_b} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_b} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^b \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_b} \right] \right\}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{b=1}^n l_b \left[-\text{sen } \theta_{e_b} \text{sen} \left(\sum_{i=1}^b \theta_{a_i} \right) \sum_{i=1}^b \dot{\theta}_{a_i} + \cos \theta_{e_b} \cos \left(\sum_{i=1}^b \theta_{a_i} \right) \dot{\theta}_{e_b} \right] \right\}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} m_c \left[n \cdot \dot{z}_m - \sum_{b=1}^n l_b \text{sen } \theta_{e_b} \dot{\theta}_{e_b} \right]^2
 \end{aligned}$$

Onde $\theta_0 = 0$ e $\sum_{i=1}^{b-1} a_i = 0$, quando $b = 1$.

No Capítulo III é apresentada a modelagem dinâmica do cabo para os casos em que a estrutura flexível é dividida em um, dois, três e quatro partes rígidas.

CAPÍTULO III
MODELAGEM DINÂMICA PARA OS CASOS DE
UM, DOIS, TRÊS E QUATRO ELOS

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta os modelos dinâmicos do cabo obtidos quando a estrutura flexível é dividida em um, dois, três e quatro elos. É considerado um cabo de comprimento l , articulado a uma estrutura flutuante (plataforma móvel) em uma das suas extremidades e livre na outra extremidade. O cabo é dividido em uma, duas, três e quatro partes rígidas de comprimentos l_i , sendo $i = 1,2,3,4$, e estes elos são conectados por articulações fictícias, conforme as Figuras 3.1, 3.2 e 3.3.

3.2 MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DE UM ELO

Conforme explicado anteriormente, para esta situação, considera-se um cabo de comprimento l_1 , articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e livre na outra extremidade, conforme ilustra a Figura 3.1. Neste caso, tem-se uma articulação na junção do cabo com a estrutura flutuante.

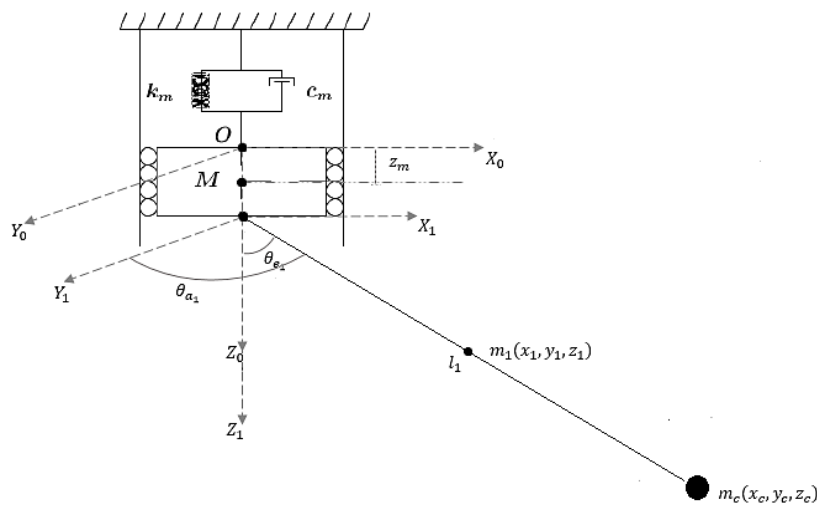


Figura 3.1 - Representação esquemática para o cabo considerando-se um único elo.

Da equação (2.16) obtém-se o Lagrangeano do sistema na forma:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} I_{R_{e_1}} \dot{\theta}_{e_1}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{a_1}} \dot{\theta}_{a_1}^2 + \frac{1}{2} I_{T_b} \dot{\theta}_{T_b}^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}_m^2 + \\
& + \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{l_1^2}{4} \left(\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2 \right) - l_1 \sin \theta_{e_1} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_1} + \dot{z}_m^2 \right] + \\
& + \frac{1}{2} m_c \left[l_1^2 \left(\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2 \right) - 2l_1 \sin \theta_{e_1} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_1} + \dot{z}_m^2 \right] + \quad (3.1) \\
& - \frac{1}{2} k_m z_m^2 - \frac{1}{2} k_{e_1} \theta_{e_1}^2 - \frac{1}{2} k_{a_1} \theta_{a_1}^2 - \frac{1}{2} k_{T_1} \theta_{T_1}^2 + \\
& - \left[\left(\frac{m_1}{2} + m_c \right) l_1 (1 - \cos \theta_{e_1}) - m_1 z_m \right] g
\end{aligned}$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange a cada uma das coordenadas generalizadas do sistema, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_m} = u(t) - c_m \dot{z}_m \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_1}} = \tau_{e_1} - c_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_1}} = \tau_{a_1} - c_{a_1} \dot{\theta}_{a_1} \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_1}} = \tau_{T_1} - c_{T_1} \dot{\theta}_{T_1} \quad (3.5)$$

onde c_m é o coeficiente de atrito devido ao movimento vertical da estrutura flutuante e c_{e_1} , c_{a_1} e c_{T_1} são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação,

de azimute e de torção. A força externa $u(t)$ surge em razão do movimento oscilatório ao qual a estrutura flutuante pode ser submetida. Os torques externos atuantes nas articulações fictícias τ_{e_1} e τ_{a_1} surgem em razão de diversas causas, como forças de empuxo, correntes subaquáticas, movimentos independentes da carga terminal m_c , arrasto hidrodinâmico, entre outras.

Para a obtenção do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, resultante do desenvolvimento das equações (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), convencionou-se o seguinte vetor de posições e de esforços externos:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (z_m, \theta_{e_1}, \theta_{a_1}, \theta_{T_1})^T \\ \vec{T}_m &= (u(t), \tau_{e_1}, \tau_{a_1}, \tau_{T_1})^T\end{aligned}\tag{3.6}$$

Assim, tais equações podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$I(\vec{x})\ddot{\vec{x}} + C\dot{\vec{x}} + K\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) + \vec{G}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \vec{T}_m\tag{3.7}$$

Na notação matricial, para o caso em que se considera um único elo, o modelo dinâmico é dado por:

$$[I_{4 \times 4}][\ddot{\vec{x}}_{4 \times 1}] + [C_{4 \times 4}][\dot{\vec{x}}_{4 \times 1}] + [K_{4 \times 4}][\vec{x}_{4 \times 1}] + [\vec{F}_{4 \times 1}] + [\vec{G}_{4 \times 1}] = [\vec{T}_{m_{4 \times 1}}]\tag{3.8}$$

onde I é a matriz de Inércia, C é a matriz dos coeficientes de atrito, K é a matriz das constantes elásticas, \vec{F} é o vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos, \vec{G} é o vetor de esforços gravitacionais e \vec{T} é o vetor dos esforços externos.

Os elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico para o cabo com um elo são apresentados na forma matricial e as equações que representam estes elementos são expressas no Apêndice A.1. Observa-se que as não linearidades do modelo estão presentes na matriz de inércia, no vetor de esforços Coriolis-centrífugos e no vetor de esforços gravitacionais.

No tópico a seguir, apresenta-se a modelagem dinâmica para o cabo dividido em dois elos.

3.3 MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DE DOIS ELOS

Neste caso é considerado o modelo dinâmico para o cabo dividido em dois elementos, ou seja, as configurações de suas duas extremidades não são alteradas, apenas o cabo é dividido em duas partes rígidas, de comprimentos l_1 , e l_2 , conectadas por uma articulações fictícias, conforme mostra a Figura 3.2, sendo que se considera sempre o primeiro elo articulado à estrutura flutuante.

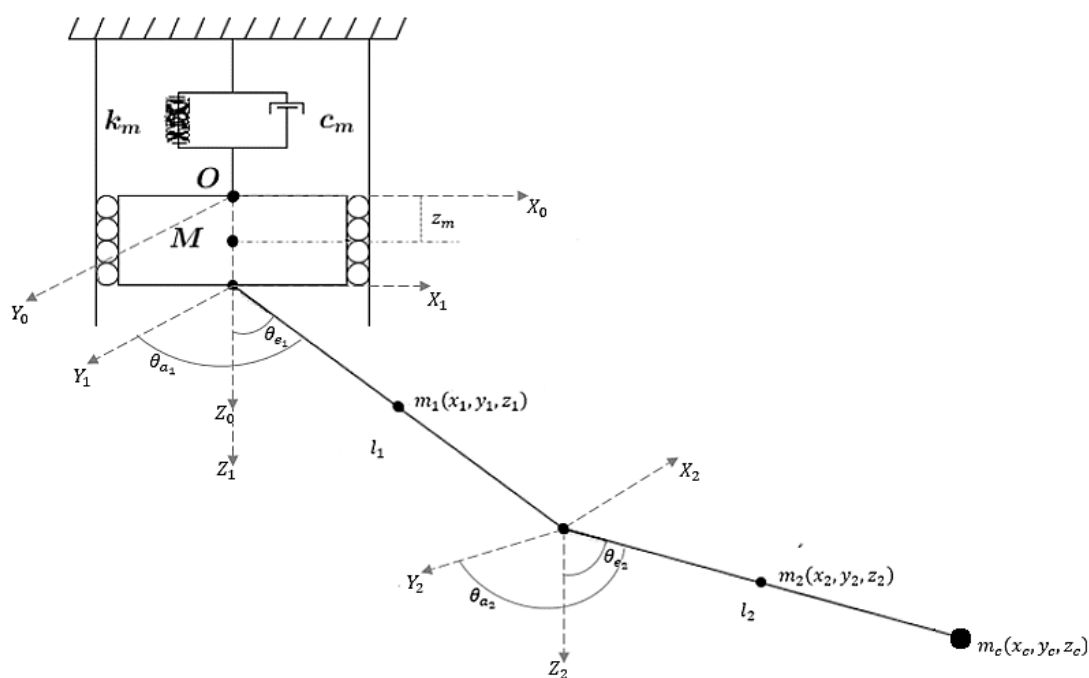


Figura 3.2 - Representação esquemática para o cabo dividido em dois elos.

Da equação (2.16) vista anteriormente, tem-se que:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}I_{R_{e_1}}\dot{\theta}_{e_1}^2 + \frac{1}{2}I_{R_{e_2}}\dot{\theta}_{e_2}^2 + \frac{1}{2}I_{R_{a_1}}\dot{\theta}_{a_1}^2 + \frac{1}{2}I_{R_{a_2}}\dot{\theta}_{a_2}^2 \\
& + \frac{1}{2}I_{T_1}\dot{\theta}_{T_1}^2 + \frac{1}{2}I_{T_2}\dot{\theta}_{T_2}^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}_m^2 + \\
& + \frac{1}{2}m_1\left[\frac{l_1^2}{4}\left(\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2\theta_{e_1}\dot{\theta}_{a_1}^2\right) - l_1\sin\theta_{e_1}\dot{z}_m\dot{\theta}_{e_1} + \dot{z}_m^2\right] + \\
& + \frac{1}{2}m_2\left\{\frac{l_2^2}{4}\left[\dot{\theta}_{e_2}^2 + \sin^2\theta_{e_2}\left(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_1}\right)^2\right] + l_1^2\left(\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2\theta_{e_1}\dot{\theta}_{a_1}^2\right) + \right. \\
& + l_1l_2\left[\left(\cos\theta_{e_1}\cos\theta_{e_2}\cos\theta_{a_2} + \sin\theta_{e_1}\sin\theta_{e_2}\right)\dot{\theta}_{e_1}\dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
& + \sin\theta_{e_1}\cos\theta_{e_2}\sin\theta_{a_2}\dot{\theta}_{e_2}\dot{\theta}_{a_1} - \cos\theta_{e_1}\sin\theta_{e_2}\sin\theta_{a_2}\dot{\theta}_{e_1}\left(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_1}\right) + \\
& \left. + \sin\theta_{e_1}\sin\theta_{e_2}\cos\theta_{a_2}\dot{\theta}_{a_1}\left(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}\right)\right] + \\
& \left. - 2l_2\sin\theta_{e_2}\dot{\theta}_{e_2}\dot{z}_m - 4l_1\sin\theta_{e_1}\dot{\theta}_{e_1}\dot{z}_m + 4\dot{z}_m^2\right\} + \tag{3.9} \\
& + \frac{1}{2}m_c\left\{l_2^2\left[\dot{\theta}_{e_2}^2 + \sin^2\theta_{e_2}\left(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_1}\right)^2\right] + l_1^2\left(\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2\theta_{e_1}\dot{\theta}_{a_1}^2\right) + \right. \\
& + 2l_1l_2\left[\left(\cos\theta_{e_1}\cos\theta_{e_2}\cos\theta_{a_2} + \sin\theta_{e_1}\sin\theta_{e_2}\right)\dot{\theta}_{e_1}\dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
& + \sin\theta_{e_1}\cos\theta_{e_2}\sin\theta_{a_2}\dot{\theta}_{e_2}\dot{\theta}_{a_1} - \cos\theta_{e_1}\sin\theta_{e_2}\sin\theta_{a_2}\dot{\theta}_{e_1}\left(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_1}\right) + \\
& \left. + \sin\theta_{e_1}\sin\theta_{e_2}\cos\theta_{a_2}\dot{\theta}_{a_1}\left(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}\right)\right] + \\
& \left. - 4l_2\sin\theta_{e_2}\dot{\theta}_{e_2}\dot{z}_m - 4l_1\sin\theta_{e_1}\dot{\theta}_{e_1}\dot{z}_m + 4\dot{z}_m^2\right\} + \\
& - \frac{1}{2}k_m z_m^2 - \frac{1}{2}k_{e_1}\theta_{e_1}^2 - \frac{1}{2}k_{e_2}\left(\theta_{e_2} - \theta_{e_1}\right)^2 - \frac{1}{2}k_{a_1}\theta_{a_1}^2 + \\
& - \frac{1}{2}k_{a_2}\left(\theta_{a_2} - \theta_{a_1}\right)^2 - \frac{1}{2}k_{T_1}\theta_{T_1}^2 - \frac{1}{2}k_{T_2}\left(\theta_{T_2} - \theta_{T_1}\right)^2 + \\
& - \left[\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)l_1\left(1 - \cos\theta_{e_1}\right) + \frac{m_2}{2}l_2\left(1 - \cos\theta_{e_2}\right) - z_m\left(m_1 + m_2\right)\right]g
\end{aligned}$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange a cada uma das variáveis do Lagrangeano do sistema, dado a partir de (3.9), as seguintes equações são determinadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_m} = u(t) - c_m \dot{z}_m \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_1}} = \tau_{e_1} - c_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} - c_{e_2} (\dot{\theta}_{e_1} - \dot{\theta}_{e_2}) \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_2}} = \tau_{e_2} - c_{e_2} (\dot{\theta}_{e_2} - \dot{\theta}_{e_1}) \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_1}} = \tau_{a_1} - c_{a_1} \dot{\theta}_{a_1} - c_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} - \dot{\theta}_{a_2}) \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_2}} = \tau_{a_2} - c_{a_2} (\dot{\theta}_{a_2} - \dot{\theta}_{a_1}) \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_1}} = \tau_{T_1} - c_{T_1} \dot{\theta}_{T_1} - c_T (\dot{\theta}_{T_1} - \dot{\theta}_{T_2}) \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_2}} = \tau_{T_2} - c_{T_2} (\dot{\theta}_{T_2} - \dot{\theta}_{T_1}) \quad (3.16)$$

onde c_m é o coeficiente de atrito devido ao movimento vertical da estrutura flutuante e $c_{e_1}, c_{e_2}; c_{a_1}, c_{a_2}$ e c_{T_1}, c_{T_2} são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação, de azimute e de torção. $u(t)$ é a força externa atuante na estrutura flutuante e τ_{e_1}, τ_{e_2} e τ_{a_1}, τ_{a_2} são os torques externos atuantes em cada articulação fictícia.

Para a obtenção do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, resultante do desenvolvimento das equações (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16), convencionou-se o seguinte vetor de posições e de esforços externos:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (z_m, \theta_{e_1}, \theta_{e_2}, \theta_{a_1}, \theta_{a_2}, \theta_{T_1}, \theta_{T_2})^T \\ \vec{T}_m &= (u(t), \tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \tau_{a_1}, \tau_{a_2}, \tau_{T_1}, \tau_{T_2})^T\end{aligned}\quad (3.17)$$

O modelo dinâmico também pode ser considerado por:

$$[I_{7 \times 7}][\ddot{\vec{x}}_{7 \times 1}] + [C_{7 \times 7}][\dot{\vec{x}}_{7 \times 1}] + [K_{7 \times 7}][\vec{x}_{7 \times 1}] + [\vec{F}_{7 \times 1}] + [\vec{G}_{7 \times 1}] = [\vec{T}_{m_{7 \times 1}}] \quad (3.18)$$

Os elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico para o cabo dividido em dois elos são apresentados na forma matricial e as equações que representam estes elementos são expressas no Apêndice A.2.

No tópico a seguir, apresenta-se a modelagem dinâmica para o cabo dividido em três elos.

3.4 MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DE TRÊS ELOS

Considera-se o cabo com as mesmas configurações em suas extremidades, dividido em três partes rígidas, de comprimentos l_1 , l_2 e l_3 , conectadas por duas articulações fictícias, conforme ilustra a Figura 3.3, com o primeiro elo articulado à estrutura flutuante.

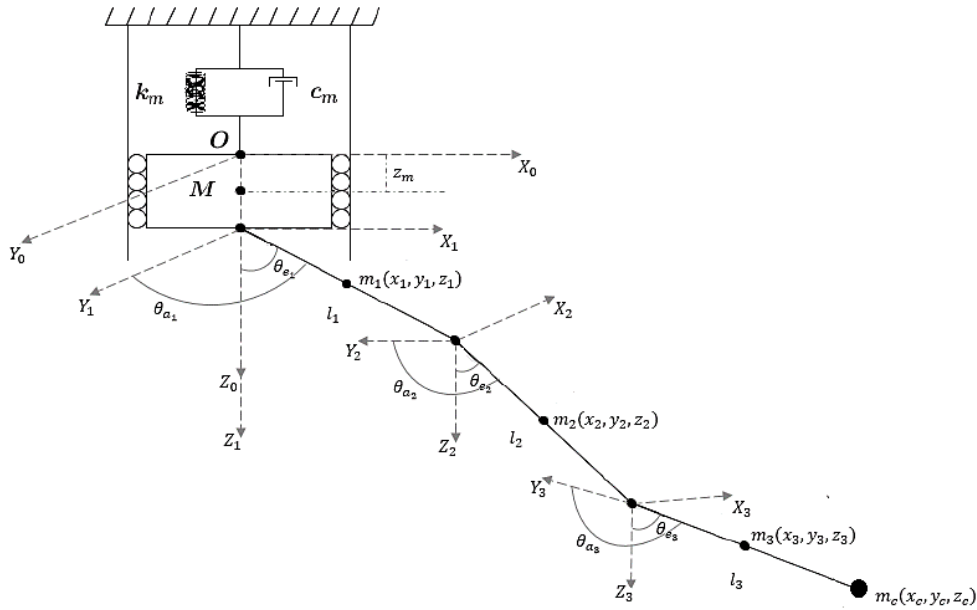


Figura 3.3 - Representação esquemática para o cabo dividido em três elos.

Da equação (2.16) tem-se que o Lagrangeano do sistema é dado por:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} I_{R_{e_1}} \dot{\theta}_{e_1}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{e_2}} \dot{\theta}_{e_2}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{e_3}} \dot{\theta}_{e_3}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{a_1}} \dot{\theta}_{a_1}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{a_2}} \dot{\theta}_{a_2}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} I_{R_{a_3}} \dot{\theta}_{a_3}^2 + \frac{1}{2} I_{T_1} \dot{\theta}_{T_1}^2 + \frac{1}{2} I_{T_2} \dot{\theta}_{T_2}^2 + \frac{1}{2} I_{T_3} \dot{\theta}_{T_3}^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}_m^2 + \\
 & + \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{l_1^2}{4} (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2) - l_1 \sin \theta_{e_1} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_1} + \dot{z}_m^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 \left\{ \frac{l_2^2}{4} [\dot{\theta}_{e_2}^2 + \sin^2 \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})^2] + l_1^2 (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2) + \right. \\
 & + l_1 l_2 [(\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_2} + \\
 & + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{a_1} - \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \\
 & + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})] + \\
 & \left. - 2 l_2 \sin \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{z}_m - 4 l_1 \sin \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} \dot{z}_m + 4 \dot{z}_m^2 \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} m_3 \left\{ \frac{l_3^2}{4} [\dot{\theta}_{e_3}^2 + \sin^2 \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})^2] + \right. \\
 & + l_2^2 [\dot{\theta}_{e_2}^2 + \sin^2 \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})^2] + l_1^2 (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2) + \\
 & \left. + l_3 l_2 [(\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3}) \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{e_3} + \right.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \\
& + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \\
& - \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})] + \\
& l_3 l_1 \{ [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3}] \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_3} + \\
& + \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} \dot{\theta}_{a_1} + \\
& + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \\
& - \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \} + \\
& 2l_2 l_1 [(\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_2} + \\
& + \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{a_1} + \\
& + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \\
& - \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})] + \\
& -3l_3 \text{sen } \theta_{e_3} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_3} - 6l_2 \text{sen } \theta_{e_2} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_2} - 6l_1 \text{sen } \theta_{e_1} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_1} + 9\dot{z}_m^2 \} + \\
& + \frac{1}{2} m_c \{ l_3^2 [\dot{\theta}_{e_3}^2 + \text{sen}^2 \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})^2] + \\
& + l_2^2 [\dot{\theta}_{e_2}^2 + \text{sen}^2 \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})^2] + l_1^2 (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \text{sen}^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2) + \\
& + 2l_3 l_2 [(\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3}) \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{e_3} + \\
& + \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \\
& + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \\
& - \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})] + \\
& + 2l_3 l_1 \{ [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3}] \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_3} + \\
& + \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} \dot{\theta}_{a_1} + \\
& + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \\
& - \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \} + \\
& 2l_2 l_1 [(\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_2} + \\
& + \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{a_1} + \\
& + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})] + \\
& -6 \sin \theta_{e_3} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_3} - 6l_2 \sin \theta_{e_2} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_2} - 6l_1 \sin \theta_{e_1} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_1} + 9\dot{z}_m^2 \} + \\
& -\frac{1}{2} k_m z_m^2 - \frac{1}{2} k_{e_1} \theta_{e_1}^2 - \frac{1}{2} k_{e_2} (\theta_{e_2} - \theta_{e_1})^2 - \frac{1}{2} k_{e_3} (\theta_{e_3} - \theta_{e_2})^2 + \\
& -\frac{1}{2} k_{a_1} \theta_{a_1}^2 - \frac{1}{2} k_{a_2} (\theta_{a_2} - \theta_{a_1})^2 - \frac{1}{2} k_{a_3} (\theta_{a_3} - \theta_{a_2})^2 + \\
& -\frac{1}{2} k_{T_1} \theta_{T_1}^2 - \frac{1}{2} k_{T_2} (\theta_{T_2} - \theta_{T_1})^2 - \frac{1}{2} k_{T_3} (\theta_{T_3} - \theta_{T_2})^2 + \\
& -\left[\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) l_1 (1 - \cos \theta_{e_1}) + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 (1 - \cos \theta_{e_2}) + \right. \\
& \left. + \frac{m_3}{2} l_3 (1 - \cos \theta_{e_3}) - z_m (m_1 + m_2 + m_3) \right] g
\end{aligned}$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange a cada uma das variáveis do Lagrangeano do sistema, dado a partir de (3.19), as seguintes equações são determinadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_m} = u(t) - c_m \dot{z}_m \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_1}} = \tau_{e_1} - c_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} - c_{e_2} (\dot{\theta}_{e_1} - \dot{\theta}_{e_2}) \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_2}} = \tau_{e_2} - c_{e_2} (\dot{\theta}_{e_2} - \dot{\theta}_{e_1}) - c_{e_3} (\dot{\theta}_{e_2} - \dot{\theta}_{e_3}) \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_3}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_3}} = \tau_{e_3} - c_{e_3} (\dot{\theta}_{e_3} - \dot{\theta}_{e_2}) \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_1}} = \tau_{a_1} - c_{a_1} \dot{\theta}_{a_1} - c_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} - \dot{\theta}_{a_2}) \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_3}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_3}} = \tau_{a_3} - c_{a_3} (\dot{\theta}_{a_3} - \dot{\theta}_{a_2}) \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_2}} = \tau_{a_2} - c_{a_2} (\dot{\theta}_{a_2} - \dot{\theta}_{a_1}) - c_{a_3} (\dot{\theta}_{a_2} - \dot{\theta}_{a_3}) \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_1}} = \tau_{T_1} - c_{T_1} \dot{\theta}_{T_1} - c_{T_2} (\dot{\theta}_{T_1} - \dot{\theta}_{T_2}) \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_2}} = \tau_{T_2} - c_{T_2} (\dot{\theta}_{T_2} - \dot{\theta}_{T_1}) - c_{T_3} (\dot{\theta}_{T_2} - \dot{\theta}_{T_3}) \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_3}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_3}} = \tau_{T_3} - c_{T_3} (\dot{\theta}_{T_3} - \dot{\theta}_{T_2}) \quad (3.29)$$

onde c_m é o coeficiente de atrito devido ao movimento vertical da estrutura flutuante e $c_{e_1}, c_{e_2}, c_{e_3}$; $c_{a_1}, c_{a_2}, c_{a_3}$ e $c_{T_1}, c_{T_2}, c_{T_3}$ são os coeficientes de atrito devidos aos movimentos angulares de elevação, de azimute e de torção. $u(t)$ é a força externa atuante na estrutura flutuante e $\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \tau_{e_3}$; $\tau_{a_1}, \tau_{a_2}, \tau_{a_3}$ e $\tau_{T_1}, \tau_{T_2}, \tau_{T_3}$ são os torques externos atuantes em cada articulação fictícia.

Para a obtenção do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, resultante do desenvolvimento das equações (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) e (3.29), convencionou-se o seguinte vetor de posições e de esforços externos:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (z_m, \theta_{e_1}, \theta_{e_2}, \theta_{e_3}, \theta_{a_1}, \theta_{a_2}, \theta_{a_3}, \theta_{T_1}, \theta_{T_2}, \theta_{T_3})^T \\ \vec{T}_m &= (u(t), \tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \tau_{e_3}, \tau_{a_1}, \tau_{a_2}, \tau_{a_3}, \tau_{T_1}, \tau_{T_2}, \tau_{T_3})^T \end{aligned} \quad (3.30)$$

O modelo dinâmico pode então ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 [I_{10 \times 10}] [\ddot{\vec{x}}_{10 \times 1}] + [C_{10 \times 10}] [\dot{\vec{x}}_{10 \times 1}] + [K_{10 \times 10}] [\vec{x}_{10 \times 1}] + [\vec{F}_{10 \times 1}] + \\
 + [\vec{G}_{10 \times 1}] = [\vec{T}_{m_{10 \times 1}}]
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Os elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico para o cabo dividido em três elos são apresentados na forma matricial e as equações que representam estes elementos são expressas no Apêndice A.3.

No tópico seguinte, será apresentada a modelagem dinâmica para o cabo dividido em quatro elos.

3.5 MODELAGEM DINÂMICA PARA O CABO DE QUATRO ELOS

Considera-se o cabo com as mesmas configurações em suas extremidades, dividido em quatro partes rígidas, de comprimentos l_1 , l_2 , l_3 e l_4 , conectadas por três articulações fictícias, conforme ilustra a Figura 3.4, com o primeiro elo articulado à estrutura flutuante.

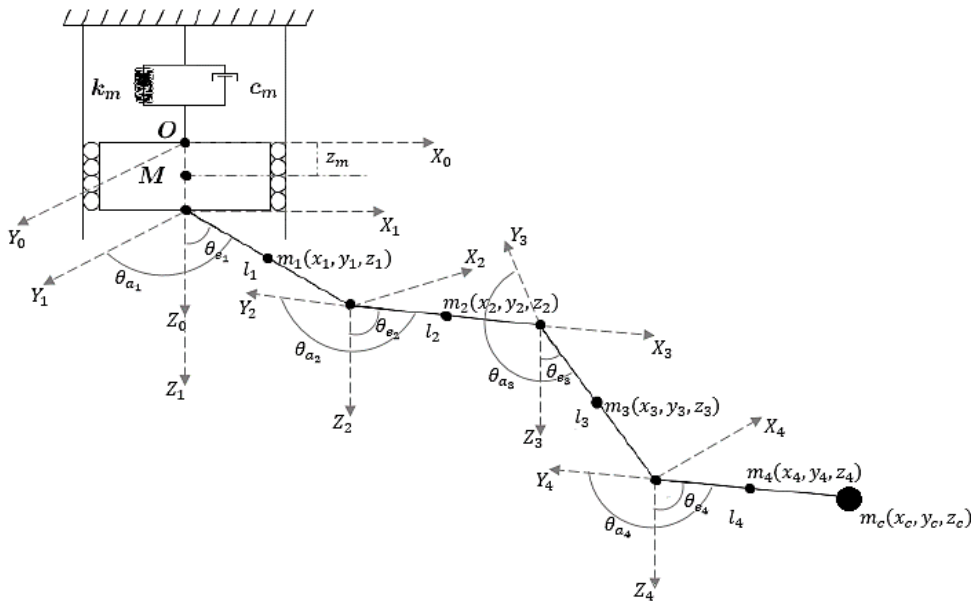


Figura 3.4 - Representação esquemática para o cabo dividido em quatro elos.

Da equação (2.16) temos que o Lagrangeano do sistema é dado por:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2}I_{R_{e_1}}\dot{\theta}_{e_1}^2 + \frac{1}{2}I_{R_{e_2}}\dot{\theta}_{e_2}^2 + \frac{1}{2}I_{R_{e_3}}\dot{\theta}_{e_3}^2 + \frac{1}{2}I_{R_{e_4}}\dot{\theta}_{e_4}^2 + \frac{1}{2}I_{R_{a_1}}\dot{\theta}_{a_1}^2 + \\
 & + \frac{1}{2}I_{R_{a_2}}\dot{\theta}_{a_2}^2 + \frac{1}{2}I_{R_{a_3}}\dot{\theta}_{a_3}^2 + \frac{1}{2}I_{R_4}\dot{\theta}_{a_4}^2 + \frac{1}{2}I_{T_1}\dot{\theta}_{T_1}^2 + \\
 & + \frac{1}{2}I_{T_2}\dot{\theta}_{T_2}^2 + \frac{1}{2}I_{T_3}\dot{\theta}_{T_3}^2 + \frac{1}{2}I_{T_4}\dot{\theta}_{T_4}^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}_m^2 + \\
 & + \frac{1}{2}m_1 \left[\frac{l_1^2}{4} (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2) - l_1 \sin \theta_{e_1} \dot{z}_m \dot{\theta}_{e_1} + \dot{z}_m^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{2}m_2 \left\{ \frac{l_2^2}{4} [\dot{\theta}_{e_2}^2 + \sin^2 \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})^2] + l_1^2 (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2) + \right. \\
 & + l_1 l_2 [(\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_2} + \\
 & + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{a_1} - \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \\
 & + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})] + \\
 & \left. - 2l_2 \sin \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{z}_m - 4l_1 \sin \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} \dot{z}_m + 4\dot{z}_m^2 \right\} + \\
 & + \frac{1}{2}m_3 \left\{ \frac{l_3^2}{4} [\dot{\theta}_{e_3}^2 + \sin^2 \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})^2] + \right. \\
 & + l_2^2 [\dot{\theta}_{e_2}^2 + \sin^2 \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})^2] + l_1^2 (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \sin^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2) + \\
 & + l_2 l_3 [(\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3}) \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{e_3} + \\
 & + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \\
 & + \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \\
 & \left. - \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \right] + \\
 & + l_1 l_3 \{ [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3}] \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_3} + \\
 & + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} \dot{\theta}_{a_1} + \\
 & + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \\
 & \left. - \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \right\} + \\
 & + 2l_1 l_2 [(\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_2} + \\
 & + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{a_1} +
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \\
& - \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})] + \\
& - 3l_3 \text{sen } \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_3} \dot{z}_m - 6l_2 \text{sen } \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{z}_m - 6l_1 \text{sen } \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} \dot{z}_m + 9\dot{z}_m^2 \} + \\
& + \frac{1}{2} m_4 \left\{ \frac{l_4^2}{4} [\dot{\theta}_{e_4}^2 + \text{sen}^2 \theta_{e_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4})^2] + \right. \\
& \quad \left. + l_3^2 [\dot{\theta}_{e_3}^2 + \text{sen}^2 \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})^2] + \right. \\
& \quad \left. + l_2^2 [\dot{\theta}_{e_2}^2 + \text{sen}^2 \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})^2] + l_1^2 (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \text{sen}^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2) + \right. \\
& \quad \left. + l_3 l_4 [(\cos \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} + \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4}) \dot{\theta}_{e_3} \dot{\theta}_{e_4} + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4} \dot{\theta}_{e_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) + \right. \\
& \quad \left. - \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4} \dot{\theta}_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4})] + \right. \\
& \quad \left. + l_1 l_4 \{ [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4}] \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_4} + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) + \right. \\
& \quad \left. - \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \} + \right. \\
& \quad \left. + 2l_2 l_3 [(\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3}) \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \right. \\
& \quad \left. - \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})] + \right. \\
& \quad \left. + 2l_1 l_3 \{ [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3}] \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \right. \\
& \quad \left. - \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \} + \right. \\
& \quad \left. + 2l_1 l_2 [(\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
& \quad \left. + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_2} \operatorname{sen} \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})] - 4l_4 \operatorname{sen} \theta_{e_4} \dot{\theta}_{e_4} \dot{z}_m + \\
& -8l_3 \operatorname{sen} \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_3} \dot{z}_m - 8l_2 \operatorname{sen} \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{z}_m - 8l_1 \operatorname{sen} \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} \dot{z}_m + 16\dot{z}_m^2 \} + \\
& + \frac{1}{2} m_c \{ l_4^2 [\dot{\theta}_{e_4}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta_{e_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4})^2] + \\
& + l_3^2 [\dot{\theta}_{e_3}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})^2] + \\
& + l_2^2 [\dot{\theta}_{e_2}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})^2] + l_1^2 (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2) + \\
& + 2l_3 l_4 [(\cos \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} + \operatorname{sen} \theta_{e_3} \operatorname{sen} \theta_{e_4}) \dot{\theta}_{e_3} \dot{\theta}_{e_4} + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \operatorname{sen} \theta_{a_4} \dot{\theta}_{e_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_3} \operatorname{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) + \\
& - \cos \theta_{e_3} \operatorname{sen} \theta_{e_4} \operatorname{sen} \theta_{a_4} \dot{\theta}_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4})] + \\
& + 2l_1 l_4 \{ [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_4}] \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_4} + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \operatorname{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4} \dot{\theta}_{a_1} + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) + \\
& - \cos \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_4} \operatorname{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \} + \\
& + 2l_2 l_3 \{ [\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \operatorname{sen} \theta_{e_2} \operatorname{sen} \theta_{e_3}] \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{e_3} + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \operatorname{sen} \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_2} \operatorname{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \\
& - \cos \theta_{e_2} \operatorname{sen} \theta_{e_3} \operatorname{sen} \theta_{a_3} \dot{\theta}_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \} + \\
& + 2l_1 l_3 \{ [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_3}] \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_3} + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \operatorname{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} \dot{\theta}_{a_1} + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) + \\
& - \cos \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_3} \operatorname{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \} + \\
& + 2l_1 l_2 \{ [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_2}] \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{e_2} + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \operatorname{sen} \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{\theta}_{a_1} + \\
& + \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) + \\
& - \cos \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{e_2} \operatorname{sen} \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \} - 8l_4 \operatorname{sen} \theta_{e_4} \dot{\theta}_{e_4} \dot{z}_m + \\
& - 8l_3 \operatorname{sen} \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_3} \dot{z}_m - 8l_2 \operatorname{sen} \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2} \dot{z}_m - 8l_1 \operatorname{sen} \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} \dot{z}_m + 16\dot{z}_m^2 \} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}k_m z_m^2 - \frac{1}{2}k_{e_1}\theta_{e_1}^2 - \frac{1}{2}k_{e_2}(\theta_{e_2} - \theta_{e_1})^2 - \frac{1}{2}k_{e_3}(\theta_{e_3} - \theta_{e_2})^2 + \\
& -\frac{1}{2}k_{e_4}(\theta_{e_4} - \theta_{e_3})^2 - \frac{1}{2}k_{a_1}\theta_{a_1}^2 - \frac{1}{2}k_{a_2}(\theta_{a_2} - \theta_{a_1})^2 - \frac{1}{2}k_{a_3}(\theta_{a_3} - \theta_{a_2})^2 + \\
& -\frac{1}{2}k_{a_4}(\theta_{a_4} - \theta_{a_3})^2 - \frac{1}{2}k_{T_1}\theta_{T_1}^2 - \frac{1}{2}k_{T_2}(\theta_{T_2} - \theta_{T_1})^2 - \frac{1}{2}k_{T_3}(\theta_{T_3} - \theta_{T_2})^2 + \\
& -\frac{1}{2}k_{T_4}(\theta_{T_4} - \theta_{T_3})^2 - \left[\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 \right) l_1 (1 - \cos \theta_{e_1}) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 \right) l_2 (1 - \cos \theta_{e_2}) + \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) l_3 (1 - \cos \theta_{e_3}) + \right. \\
& \left. + m_4 l_4 (1 - \cos \theta_{e_4}) - z_m (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \right] g
\end{aligned}$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange a cada uma das variáveis do Lagrangeano do sistema, dado a partir de (3.32), as seguintes equações são determinadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_m} = u(t) - c_m \dot{z}_m \quad (3.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_1}} = \tau_{e_1} - c_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} - c_{e_2} (\dot{\theta}_{e_1} - \dot{\theta}_{e_2}) \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_2}} = \tau_{e_2} - c_{e_2} (\dot{\theta}_{e_2} - \dot{\theta}_{e_1}) - c_{e_3} (\dot{\theta}_{e_2} - \dot{\theta}_{e_3}) \quad (3.35)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_3}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_3}} = \tau_{e_3} - c_{e_3} (\dot{\theta}_{e_3} - \dot{\theta}_{e_2}) - c_{e_4} (\dot{\theta}_{e_3} - \dot{\theta}_{e_4}) \quad (3.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{e_4}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{e_4}} = \tau_{e_4} - c_{e_4} (\dot{\theta}_{e_4} - \dot{\theta}_{e_3}) \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_1}} = \tau_{a_1} - c_{a_1} \dot{\theta}_{a_1} - c_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} - \dot{\theta}_{a_2}) \quad (3.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_2}} = \tau_{a_2} - c_{a_2} (\dot{\theta}_{a_2} - \dot{\theta}_{a_1}) - c_{a_3} (\dot{\theta}_{a_2} - \dot{\theta}_{a_3}) \quad (3.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_3}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_3}} = \tau_{a_3} - c_{a_3} (\dot{\theta}_{a_3} - \dot{\theta}_{a_2}) - c_{a_4} (\dot{\theta}_{a_3} - \dot{\theta}_{a_4}) \quad (3.40)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{a_4}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{a_4}} = \tau_{a_4} - c_{a_4} (\dot{\theta}_{a_4} - \dot{\theta}_{a_3}) \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_1}} = \tau_{T_1} - c_{T_1} \dot{\theta}_{T_1} - c_{T_2} (\dot{\theta}_{T_1} - \dot{\theta}_{T_2}) \quad (3.42)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_2}} = \tau_{T_2} - c_{T_2} (\dot{\theta}_{T_2} - \dot{\theta}_{T_1}) - c_{T_3} (\dot{\theta}_{T_2} - \dot{\theta}_{T_3}) \quad (3.43)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_3}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_3}} = \tau_{T_3} - c_{T_3} (\dot{\theta}_{T_3} - \dot{\theta}_{T_2}) - c_{T_4} (\dot{\theta}_{T_3} - \dot{\theta}_{T_4}) \quad (3.44)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{T_4}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{T_4}} = \tau_{T_4} - c_{T_4} (\dot{\theta}_{T_4} - \dot{\theta}_{T_3}) \quad (3.45)$$

onde c_m é o coeficiente de atrito devido ao movimento vertical da estrutura flutuante e $c_{e_1}, c_{e_2}, c_{e_3}, c_{e_4}$; $c_{a_1}, c_{a_2}, c_{a_3}, c_{a_4}$ e $c_{T_1}, c_{T_2}, c_{T_3}, c_{T_4}$ são os coeficientes de atrito devidos

aos movimentos angulares de elevação e de azimute. $u(t)$ é a força externa atuante na estrutura flutuante e $\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \tau_{e_3}, \tau_{e_4}; \tau_{a_1}, \tau_{a_2}, \tau_{a_3}, \tau_{a_4}$ e $\tau_{T_1}, \tau_{T_2}, \tau_{T_3}, \tau_{T_4}$ são os torques externos atuantes em cada articulação fictícia.

Para a obtenção do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, resultante do desenvolvimento das equações (3.33) a (3.45), convencionou-se o seguinte vetor de posições e de esforços externos:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (z_m, \theta_{e_1}, \theta_{e_2}, \theta_{e_3}, \theta_{e_4}, \theta_{a_1}, \theta_{a_2}, \theta_{a_3}, \theta_{a_4}, \theta_{T_1}, \theta_{T_2}, \theta_{T_3}, \theta_{T_4})^T \\ \vec{T}_m &= (u(t), \tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \tau_{e_3}, \tau_{e_4}, \tau_{a_1}, \tau_{a_2}, \tau_{a_3}, \tau_{a_4}, \tau_{T_1}, \tau_{T_2}, \tau_{T_3}, \tau_{T_4})^T\end{aligned}\quad (3.46)$$

As equações diferenciais do modelo dinâmico assumem a forma:

$$\begin{aligned}[I_{13 \times 13}][\ddot{\vec{x}}_{13 \times 1}] + [C_{13 \times 13}][\dot{\vec{x}}_{13 \times 1}] + [K_{13 \times 13}][\vec{x}_{13 \times 1}] + [\vec{F}_{13 \times 1}] + \\ + [\vec{G}_{13 \times 1}] = [\vec{T}_{m_{13 \times 1}}]\end{aligned}\quad (3.47)$$

Os elementos das matrizes e dos vetores do modelo dinâmico para o cabo dividido em quatro têm suas equações expressas no Apêndice A.4.

Observa-se que as matrizes e vetores encontrados em cada caso, quando se considera o cabo dividido em um, dois, três e quatro elos, diferem-se das matrizes e vetores encontrados em (ZANELA [34]) apenas no acréscimo de uma primeira linha e uma primeira coluna; nas matrizes e em uma primeira linha para os vetores. Isso se deve à existência da plataforma móvel, que acrescenta mais um grau de liberdade ao sistema dinâmico.

No Capítulo IV serão apresentadas as forças que atuam na carga terminal do cabo, fazendo com que seu comportamento assemelhe-se a um ROV. Considera-se primeiramente que estas forças sejam atuantes no referencial inercial, seguido da análise que considera as forças atuantes no referencial do corpo.

CAPÍTULO IV
FORÇAS NA CARGA TERMINAL

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será desenvolvido o equacionamento relativo à inclusão de esforços aplicados na carga terminal, os quais geram forças em cada elo e torques em cada articulação fictícia. Esse caso assemelha-se a um ROV como carga terminal, podendo assim receber esforços externos. Inicialmente analisa-se o comportamento da estrutura flexível quando são aplicados esforços externos à carga terminal considerada puntual, com massa concentrada em seu centro de massa e, nesse caso, os esforços externos não geram torque em torno do centro de massa da carga terminal. Em seguida, analisa-se a situação onde a carga terminal não mais será considerada puntual e sim, um corpo rígido no qual atuam forças e torques.

4.2 FORÇAS EXTERNAS À CARGA TERMINAL

Considera-se um cabo de comprimento l , articulado a uma estrutura móvel em uma de suas extremidades e livre sua outra, onde existe uma carga terminal de massa m_c (ver Figura 2.1 no capítulo II).

Para analisar os efeitos dinâmicos causados no cabo ao se aplicar forças externas à carga terminal, considera-se uma força \vec{F}_{c0} externa ao sistema, atuando na carga terminal. Essa força externa está no referencial inercial $X_0Y_0Z_0$ e origina forças nos elos e torques nas articulações fictícias, ou seja, forças e torques são transmitidos ao longo da cadeia articulada de elos, quando se considera o cabo formado por elos rígidos conectados por articulações fictícias, conforme representado na Figura 4.1.

4.2.1 EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM CINCO ELOS

Considera-se o cabo vinculado a uma plataforma móvel e contendo uma carga terminal na sua outra extremidade, com uma força \vec{F}_{c0} , escrita no referencial inercial, atuante nesta carga. Para o desenvolvimento das equações, o cabo foi dividido em cinco

elos, de comprimentos l_1, l_2, l_3, l_4 e l_5 , conectados por articulações fictícias, conforme mostra a Figura 4.1.

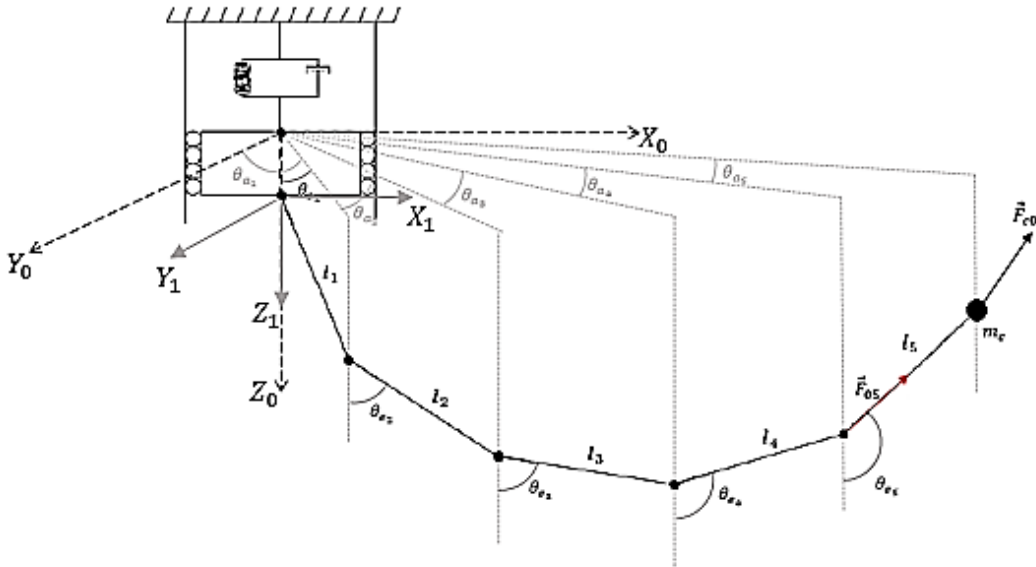


Figura 4.1 - Representação geral para o cabo dividido em cinco elos.

Para a obtenção das forças em cada elo e dos torques em cada articulação, originados pela força na carga terminal, efetua-se uma análise vetorial desse esforço. No contexto físico, tem-se que o torque ($\vec{\tau}$) é o produto vetorial entre a força aplicada em um corpo \vec{F} , e o braço de alavanca desse corpo, \vec{r} , ou seja:

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r} \tag{4.1}$$

Considera-se inicialmente uma força externa \vec{F}_{c0} aplicada na carga terminal. Essa força atua sobre os elos, gerando torques nas articulações devido a ação de \vec{F}_{c0} escrita no referencial inercial. Como mostra a Figura 4.1, tem-se que em um cabo dividido em cinco partes rígidas, há a formação de cinco torques. Os torques são calculados a partir da carga terminal, ou seja, serão calculados $\vec{\tau}_5$ (última articulação), $\vec{\tau}_4$, $\vec{\tau}_3$, $\vec{\tau}_2$ e $\vec{\tau}_1$ (articulação da base), nesta sequência. Sabe-se que a força externa \vec{F}_{c0} pode ser expressa da seguinte forma:

$$\vec{F}_{c0} = F_{c0x}\vec{i} + F_{c0y}\vec{j} + F_{c0z}\vec{k} \quad (4.2)$$

Para que seja obtido o vetor braço de alavanca, que expressa a distância entre a carga terminal e a última articulação, deve-se conhecer o vetor que expressa a distância entre a origem do sistema inercial e a carga terminal ($\vec{r}_{0,m}$), bem como o vetor que expressa a distância entre a origem do sistema inercial e a quinta articulação ($\vec{r}_{0,5}$), conforme mostrado na Figura 4.2.

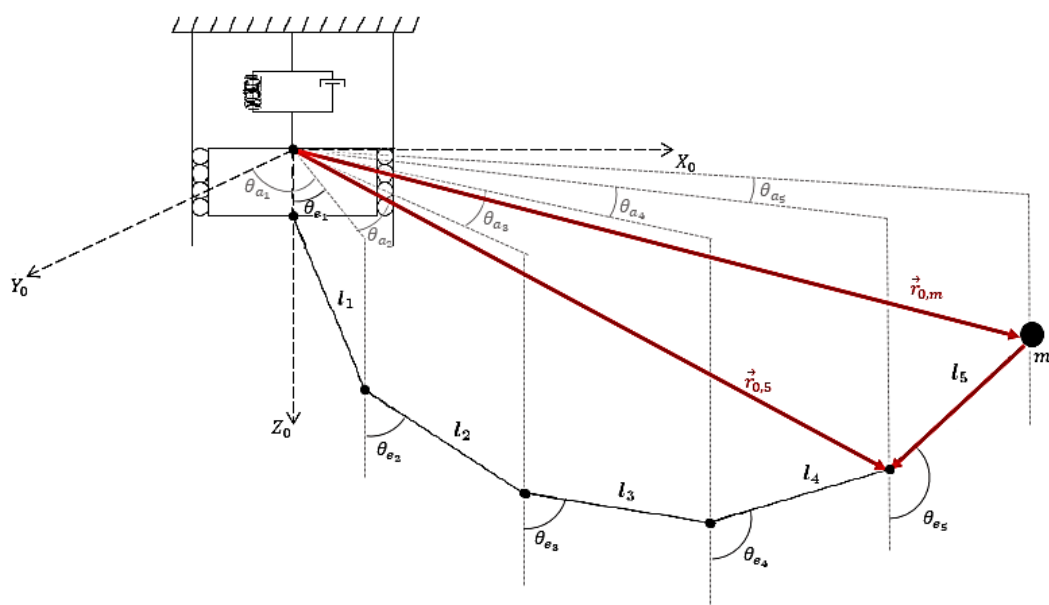


Figura 4.2 - Representação dos vetores cujos seus módulos definem a distância entre a carga terminal e a quinta articulação.

De acordo com a Figura 4.2, estes vetores podem ser expressos como:

$$\vec{r}_{0,m} = \begin{cases} \vec{r}_{0,mx} = l_1 \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{a_1} + l_2 \operatorname{sen} \theta_{e_2} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + \\ \quad + l_3 \operatorname{sen} \theta_{e_3} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ \quad + l_4 \operatorname{sen} \theta_{e_4} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\ \quad + l_5 \operatorname{sen} \theta_{e_5} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) \\ \vec{r}_{0,my} = l_1 \operatorname{sen} \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1} + l_2 \operatorname{sen} \theta_{e_2} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + \\ \quad + l_3 \operatorname{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ \quad + l_4 \operatorname{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\ \quad + l_5 \operatorname{sen} \theta_{e_5} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) \\ \vec{r}_{0,mz} = z_m + l_1 \cos \theta_{e_1} + l_2 \cos \theta_{e_2} + l_3 \cos \theta_{e_3} + \\ \quad + l_4 \cos \theta_{e_4} + l_5 \cos \theta_{e_5} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\vec{r}_{0,5} = \begin{cases} \vec{r}_{0,5x} = l_1 \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{a_1} + l_2 \operatorname{sen} \theta_{e_2} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + \\ \quad + l_3 \operatorname{sen} \theta_{e_3} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ \quad + l_4 \operatorname{sen} \theta_{e_4} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \\ \vec{r}_{0,5y} = l_1 \operatorname{sen} \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1} + l_2 \operatorname{sen} \theta_{e_2} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + \\ \quad + l_3 \operatorname{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ \quad + l_4 \operatorname{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \\ \vec{r}_{0,5z} = z_m + l_1 \cos \theta_{e_1} + l_2 \cos \theta_{e_2} + l_3 \cos \theta_{e_3} + l_4 \cos \theta_{e_4} \end{cases} \quad (4.4)$$

Desta forma, $\vec{r}_{m,5}$ é dado por:

$$\vec{r}_{m,5} = \vec{r}_{0,5} - \vec{r}_{0,m} \quad (4.5)$$

Portanto

$$\vec{r}_{m,5} = \begin{cases} \vec{r}_{m,5x} = -l_5 \operatorname{sen} \theta_{e_5} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) \\ \vec{r}_{m,5y} = -l_5 \operatorname{sen} \theta_{e_5} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) \\ \vec{r}_{m,5z} = -l_5 \cos \theta_{e_5} \end{cases} \quad (4.6)$$

O torque originado na quinta articulação fictícia é obtido a partir da equação (4.1), possuindo a forma:

$$\vec{\tau}_5 = \vec{F}_{c0} \times \vec{r}_{m,5} \quad (4.7)$$

Assim, o torque na quinta articulação é expresso como:

$$\vec{\tau}_5 = \left\{ \begin{array}{l} [\vec{F}_{c0z} \operatorname{sen} \theta_{e_5} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) - \vec{F}_{c0y} \cos \theta_{e_5}] \vec{i} + \\ + [\vec{F}_{c0x} \cos \theta_{e_5} - \vec{F}_{c0z} \operatorname{sen} \theta_{e_5} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5})] \vec{j} + \\ + \left[\begin{array}{l} \vec{F}_{c0y} \operatorname{sen} \theta_{e_5} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) + \\ - \vec{F}_{c0x} \operatorname{sen} \theta_{e_5} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) \end{array} \right] \vec{k} \end{array} \right\} l_5 \quad (4.8)$$

Para a determinação da força \vec{F}_5 , discrimina-se inicialmente um vetor unitário na direção do vetor $\vec{r}_{5,m}$, que une a última articulação à carga terminal. Este vetor unitário é expresso como:

$$\vec{u}_{5,m} = \frac{r_{m,5x}}{|\vec{r}_{m,5}|} \vec{i} + \frac{r_{m,5y}}{|\vec{r}_{m,5}|} \vec{j} + \frac{r_{m,5z}}{|\vec{r}_{m,5}|} \vec{k} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_{5,m} = & \operatorname{sen} \theta_{e_5} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) \vec{i} + \\ & + \operatorname{sen} \theta_{e_5} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) \vec{j} + \cos \theta_{e_5} \vec{k} \end{aligned}$$

Portanto, a força \vec{F}_5 no quinto elo é a projeção da \vec{F}_{c0} na direção $\vec{u}_{5,m}$:

$$\vec{F}_5 = \vec{F}_{c0} \cos \alpha_5 \quad (4.10)$$

onde α_5 é o ângulo entre a força resultante \vec{F}_{c0} e o vetor unitário $\vec{u}_{5,m}$ conforme ilustra a Figura 4.3

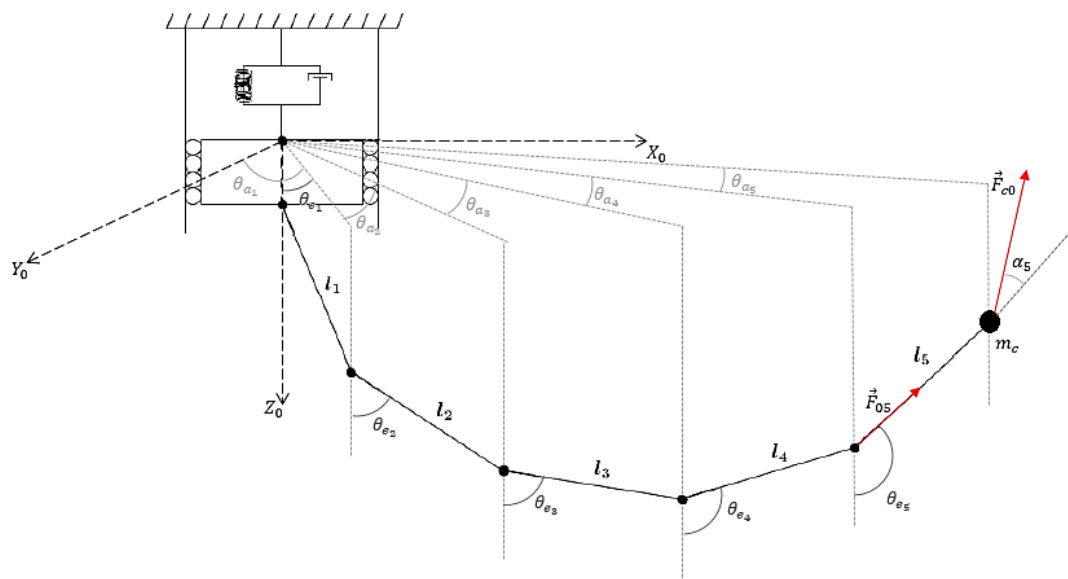


Figura 4.3 - Representação do vetor força \vec{F}_{c0} e o vetor unitário $\vec{u}_{5,m}$.

Ao realizar o produto escalar entre a força resultante \vec{F}_{c0} e o vetor unitário $\vec{u}_{5,m}$, tem-se o $\cos \alpha_5$:

$$\cos \alpha_5 = \frac{\vec{F}_{c0} \vec{u}_{5,m}}{|\vec{F}_{c0}|} \tag{4.11}$$

Analogamente às equações (4.5) e (4.6), o vetor braço de alavanca $\vec{r}_{5,4}$ (expressa a distância entre a quinta e a quarta articulação) possui a forma:

$$\vec{r}_{5,4} = \vec{r}_{0,4} - \vec{r}_{0,5} \tag{4.12}$$

onde $\vec{r}_{0,5}$ é conforme a equação (4.4) e

$$\vec{r}_{0,4} = \begin{cases} \vec{r}_{0,4x} = l_1 \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{a_1} + l_2 \operatorname{sen} \theta_{e_2} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + \\ \quad + l_3 \operatorname{sen} \theta_{e_3} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \\ \vec{r}_{0,4y} = l_1 \operatorname{sen} \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1} + l_2 \operatorname{sen} \theta_{e_2} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + \\ \quad + l_3 \operatorname{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \\ \vec{r}_{0,4z} = z_m + l_1 \cos \theta_{e_1} + l_2 \cos \theta_{e_2} + l_3 \cos \theta_{e_3} \end{cases} \quad (4.13)$$

Portanto,

$$\vec{r}_{5,4} = \begin{cases} \vec{r}_{5,4x} = -l_4 \operatorname{sen} \theta_{e_4} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \\ \vec{r}_{5,4y} = -l_4 \operatorname{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \\ \vec{r}_{5,4z} = -l_4 \cos \theta_{e_4} \end{cases} \quad (4.14)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.7) e (4.8), tem-se o produto vetorial para a obtenção do torque $\vec{\tau}_4$ na quarta articulação, dado como:

$$\vec{\tau}_4 = \vec{F}_5 \times \vec{r}_{5,4} \quad (4.15)$$

$$\vec{\tau}_4 = \left\{ \begin{array}{l} [\vec{F}_{c0z} \operatorname{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) - \vec{F}_{c0y} \cos \theta_{e_4}] \vec{i} + \\ + [\vec{F}_{c0x} \cos \theta_{e_4} - \vec{F}_{c0z} \operatorname{sen} \theta_{e_4} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})] \vec{j} + \\ + \left[\begin{array}{l} \vec{F}_{c0y} \operatorname{sen} \theta_{e_4} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\ -\vec{F}_{c0x} \operatorname{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \end{array} \right] \vec{k} \end{array} \right\} l_4 \cos \alpha_5 \quad (4.16)$$

A força \vec{F}_4 é a projeção da \vec{F}_5 na direção do quarto elo, ou seja, na direção de $\vec{r}_{4,5}$, cujo vetor unitário é expresso como:

$$\vec{u}_{4,5} = \frac{r_{5,4x}}{|\vec{r}_{5,4}|} \vec{i} + \frac{r_{5,4y}}{|\vec{r}_{5,4}|} \vec{j} + \frac{r_{5,4z}}{|\vec{r}_{5,4}|} \vec{k} \quad (4.17)$$

$$\vec{u}_{4,5} = \operatorname{sen} \theta_{e_4} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \vec{i} + \\ + \operatorname{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \vec{j} + \cos \theta_{e_4} \vec{k}$$

Portanto, a força no quarto elo é dada por:

$$\vec{F}_4 = \vec{F}_5 \cos \alpha_4 \quad (4.18)$$

onde,

$$\cos \alpha_4 = \frac{\vec{F}_5 \vec{u}_{4,5}}{|\vec{F}_5|} \quad (4.19)$$

Substituindo-se a equação (4.10) em (4.18), tem-se a força \vec{F}_4 na forma:

$$\vec{F}_4 = \vec{F}_{c0} \cos \alpha_5 \cos \alpha_4 \quad (4.20)$$

Analogamente às equações (4.12) e (4.13), o vetor braço de alavanca $\vec{r}_{4,3}$ que expressa a distância entre a quarta e terceira articulação possui a forma:

$$\vec{r}_{4,3} = \vec{r}_{0,3} - \vec{r}_{0,4} \quad (4.21)$$

onde o vetor $\vec{r}_{0,4}$ é conforme equação (4.13), e

$$\vec{r}_{0,3} = \begin{cases} \vec{r}_{0,3x} = l_1 \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{a_1} + l_2 \sin \theta_{e_2} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \\ \vec{r}_{0,3y} = l_1 \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1} + l_2 \sin \theta_{e_2} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \\ \vec{r}_{0,3z} = z_m + l_1 \cos \theta_{e_1} + l_2 \cos \theta_{e_2} \end{cases} \quad (4.22)$$

Assim,

$$\vec{r}_{4,3} = \begin{cases} \vec{r}_{4,3x} = -l_3 \sin \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \\ \vec{r}_{4,3y} = -l_3 \sin \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \\ \vec{r}_{4,3z} = -l_3 \cos \theta_{e_3} \end{cases} \quad (4.23)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.15) e (4.16), tem-se o produto vetorial para a obtenção do torque $\vec{\tau}_3$ na terceira articulação, como:

$$\vec{\tau}_3 = \vec{F}_4 \times \vec{r}_{4,3} \quad (4.24)$$

$$\vec{\tau}_3 = \left\{ \begin{array}{l} [\vec{F}_{c0z} \text{sen } \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) - \vec{F}_{c0y} \cos \theta_{e_3}] \vec{i} + \\ + [\vec{F}_{c0x} \cos \theta_{e_3} - \vec{F}_{c0z} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3})] \vec{j} + \\ + \left[\begin{array}{l} \vec{F}_{c0y} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ -\vec{F}_{c0x} \text{sen } \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \end{array} \right] \vec{k} \end{array} \right\} l_3 \cos \alpha_4 \cos \alpha_5 \quad (4.25)$$

Para a obtenção da força \vec{F}_3 , age-se de forma análoga aos casos anteriores:

$$\vec{u}_{3,4} = \frac{r_{4,3x}}{|\vec{r}_{4,3}|} \vec{i} + \frac{r_{4,3y}}{|\vec{r}_{4,3}|} \vec{j} + \frac{r_{4,3z}}{|\vec{r}_{4,3}|} \vec{k} \quad (4.26)$$

$$\vec{u}_{3,4} = \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \vec{i} + \text{sen } \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \vec{j} + \cos \theta_{e_3} \vec{k}$$

Portanto, a força \vec{F}_3 no terceiro elo é dada por:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_4 \cos \alpha_3 \quad (4.27)$$

onde,

$$\cos \alpha_3 = \frac{\vec{F}_4 \vec{u}_{3,4}}{|\vec{F}_4|} \quad (4.28)$$

Substituindo-se a equação (4.20) em (4.27) tem-se:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{c0} \cos \alpha_5 \cos \alpha_4 \cos \alpha_3 \quad (4.29)$$

Analogamente às equações (4.21) e (4.23), o vetor braço de alavanca $\vec{r}_{3,2}$ expressa a distância entre a terceira e a segunda articulação:

$$\vec{r}_{3,2} = \vec{r}_{0,2} - \vec{r}_{0,3} \quad (4.30)$$

onde $\vec{r}_{0,3}$ é conforme equação (4.22) e

$$\vec{r}_{0,2} = \begin{cases} \vec{r}_{0,2x} = l_1 \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{a_1} \\ \vec{r}_{0,2y} = l_1 \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1} \\ \vec{r}_{0,2z} = z_m + l_1 \cos \theta_{e_1} \end{cases} \quad (4.31)$$

Portanto,

$$\vec{r}_{3,2} = \begin{cases} \vec{r}_{3,2x} = -l_2 \sin \theta_{e_2} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \\ \vec{r}_{3,2y} = -l_2 \sin \theta_{e_2} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \\ \vec{r}_{3,2z} = -l_2 \cos \theta_{e_2} \end{cases} \quad (4.32)$$

Logo, de forma análoga às equações (4.24) e (4.25), tem-se o produto vetorial para a obtenção do torque $\vec{\tau}_2$ na segunda articulação sob a forma:

$$\vec{\tau}_2 = \vec{F}_3 \times \vec{r}_{3,2} \quad (4.33)$$

$$\vec{\tau}_2 = \left\{ \begin{array}{l} [\vec{F}_{c0z} \sin \theta_{e_2} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) - \vec{F}_{c0y} \cos \theta_{e_2}] \vec{i} + \\ + [\vec{F}_{c0x} \cos \theta_{e_2} - \vec{F}_{c0z} \sin \theta_{e_2} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2})] \vec{j} + \\ + \left[\begin{array}{l} \vec{F}_{c0y} \sin \theta_{e_2} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \\ - \vec{F}_{c0x} \sin \theta_{e_2} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \end{array} \right] \vec{k} \end{array} \right\} l_2 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 \cos \alpha_5 \quad (4.34)$$

A força no segundo elo (\vec{F}_2) corresponde à projeção da \vec{F}_3 na direção do elo dois, ou seja, na direção do vetor $\vec{r}_{3,2}$, cujo vetor unitário é expresso como:

$$\vec{u}_{2,3} = \frac{r_{3,2x}}{|\vec{r}_{3,2}|} \vec{i} + \frac{r_{3,2y}}{|\vec{r}_{3,2}|} \vec{j} + \frac{r_{3,2z}}{|\vec{r}_{3,2}|} \vec{k} \quad (4.35)$$

$$\vec{u}_{2,3} = \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \vec{i} + \text{sen } \theta_{e_2} \text{cos}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \vec{j} + \text{cos } \theta_{e_2} \vec{k}$$

Portanto, a força \vec{F}_2 no segundo elo é dada por:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_3 \text{cos } \alpha_2 \quad (4.36)$$

onde,

$$\text{cos } \alpha_2 = \frac{\vec{F}_3 \vec{u}_{2,3}}{|\vec{F}_3|} \quad (4.37)$$

Substituindo-se a equação (4.29) em (4.36), tem-se \vec{F}_2 na forma:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{c0} \text{cos } \alpha_5 \text{cos } \alpha_4 \text{cos } \alpha_3 \text{cos } \alpha_2 \quad (4.38)$$

O vetor braço de alavanca $\vec{r}_{2,1}$ possui a forma:

$$\vec{r}_{2,1} = \begin{cases} \vec{r}_{2,1x} = -l_1 \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{a_1} \\ \vec{r}_{2,1y} = -l_1 \text{sen } \theta_{e_1} \text{cos } \theta_{a_1} \\ \vec{r}_{2,1z} = -l_1 \text{cos } \theta_{e_1} \end{cases} \quad (4.39)$$

Então, de forma análoga às equações (4.33) e (4.34), tem-se o produto vetorial para a obtenção do torque $\vec{\tau}_1$ na primeira articulação, na forma:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{F}_2 \times \vec{r}_{2,1} \quad (4.40)$$

$$\vec{\tau}_1 = \left\{ \begin{array}{l} [\vec{F}_{c0z} \text{sen } \theta_{e_1} \text{cos } \theta_{a_1} - \vec{F}_{c0y} \text{cos } \theta_{e_1}] \vec{i} + \\ + [\vec{F}_{c0x} \text{cos } \theta_{e_1} - \vec{F}_{c0z} \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{a_1}] \vec{j} + \\ + \left[\begin{array}{l} \vec{F}_{c0y} \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{a_1} + \\ -\vec{F}_{c0x} \text{sen } \theta_{e_1} \text{cos } \theta_{a_1} \end{array} \right] \vec{k} \end{array} \right\} l_1 \text{cos } \alpha_2 \text{cos } \alpha_3 \text{cos } \alpha_4 \text{cos } \alpha_5 \quad (4.41)$$

Os torques $\vec{\tau}_5$, $\vec{\tau}_4$, $\vec{\tau}_3$, $\vec{\tau}_2$ e $\vec{\tau}_1$ obtidos nas equações (4.8), (4.16), (4.25), (4.34) e (4.41) respectivamente, possuem suas coordenadas no referencial inercial e por isso precisam ser projetados para os respectivos referenciais das articulações. A representação no sistema da articulação pode ser obtida por meio de n rotações negativas de azimute em torno dos eixos Z_i , paralelos entre si.

$$R_{n-1} = \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{i=1}^n \theta_{a_i}\right) & \text{sen}\left(\sum_{i=1}^n \theta_{a_i}\right) & 0 \\ -\text{sen}\left(\sum_{i=1}^n \theta_{a_i}\right) & \cos\left(\sum_{i=1}^n \theta_{a_i}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Portanto, o vetor de toques $\vec{\tau}_5 = (\tau_{5x}, \tau_{5y}, \tau_{5z})$ no sistema da articulação é denotado por $\vec{\tau}_{c_5} = (\tau_{c_5x}, \tau_{c_5y}, \tau_{c_5z})$ e dado por:

$$\vec{\tau}_{c_5} = R_5^T \vec{\tau}_5 \quad (4.43)$$

onde,

$$R_5 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) & \text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) & \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

O vetor de toques $\vec{\tau}_4 = (\tau_{4x}, \tau_{4y}, \tau_{4z})$ no sistema da articulação é denotado por $\vec{\tau}_{c_4} = (\tau_{c_4x}, \tau_{c_4y}, \tau_{c_4z})$ e dado por:

$$\vec{\tau}_{c_4} = R_4^T \vec{\tau}_4 \quad (4.45)$$

onde,

$$R_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) & \text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) & 0 \\ -\text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) & \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

O vetor de toques $\vec{\tau}_3 = (\tau_{3x}, \tau_{3y}, \tau_{3z})$ no sistema da articulação é denotado por $\vec{\tau}_{c_3} = (\tau_{c_3x}, \tau_{c_3y}, \tau_{c_3z})$ e dado por:

$$\vec{\tau}_{c_3} = R_3^T \vec{\tau}_3 \quad (4.47)$$

onde,

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) & \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) & 0 \\ -\sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) & \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

O vetor de toques $\vec{\tau}_2 = (\tau_{2x}, \tau_{2y}, \tau_{2z})$ no sistema da articulação é denotado por $\vec{\tau}_{c_2} = (\tau_{c_2x}, \tau_{c_2y}, \tau_{c_2z})$ e dado por:

$$\vec{\tau}_{c_2} = R_2^T \vec{\tau}_2 \quad (4.49)$$

onde,

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) & \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) & 0 \\ -\sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) & \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

No vetor de torques $\vec{\tau}_1$ não é necessário aplicar-se a transformação, pois o sistema inercial coincide com o sistema da articulação.

A partir dos torques expressos no sistema da articulação é possível identificar os torques em elevação e azimute que atuam sobre esta articulação, como ilustrado na Figura 4.4. O torque em elevação é realizado sobre o eixo perpendicular à projeção do elo no plano horizontal e o toque em azimute é igual ao torque sobre o eixo Z_i .

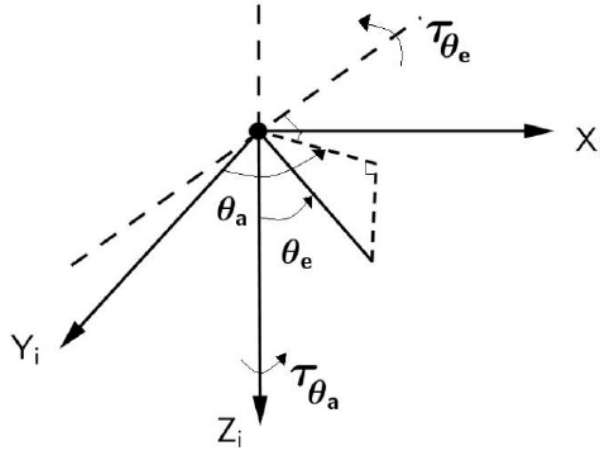


Figura 4.4 - Representação dos torques em elevação e azimute.

Portanto, os toques em elevação e azimute na primeira, segunda, terceira, quarta e quinta articulação, respectivamente, são dados por:

$$\tau_{e_1} = -\tau_{c_1x} \cos \theta_{a_1} + \tau_{c_1y} \sin \theta_{a_1} \quad (4.51)$$

$$\tau_{a_1} = \tau_{c_1z} \quad (4.52)$$

$$\tau_{e_2} = -\tau_{c_2x} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + \tau_{c_2y} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \quad (4.53)$$

$$\tau_{a_2} = \tau_{c_2z} \quad (4.54)$$

$$\tau_{e_3} = -\tau_{c_3x} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \tau_{c_3y} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \quad (4.55)$$

$$\tau_{a_3} = \tau_{c_3z} \quad (4.56)$$

$$\tau_{e_4} = -\tau_{c_4x} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \tau_{c_4y} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \quad (4.57)$$

$$\tau_{a_4} = \tau_{c_4z} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \tau_{e_5} = & -\tau_{c_5x} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) + \\ & + \tau_{c_5y} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4} + \theta_{a_5}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\tau_{a_5} = \tau_{c_5z} \quad (4.60)$$

Uma vez obtidos os torques em elevação e azimute, eles entram na dinâmica do cabo somados aos vetores de torques externos. Os elementos dos vetores de torques externos encontram-se no Apêndice B.1. É importante ressaltar que, neste capítulo, as forças são aplicadas na carga terminal como se esta fosse puntual e, portanto, o cabo nesse caso não sofre torção.

4.3 FORÇAS E TORQUES ATUANTES NO CORPO RÍGIDO

Para este caso considera-se que tanto forças quanto torques atuantes na carga terminal estão no referencial do corpo ($X_c Y_c Z_c$, Figura 4.5), ou seja, aproxima-se mais da situação na qual se tem atuadores na carga terminal, aplicando esforços como no caso de um veículo subaquático do tipo ROV. Portanto, parte do equacionamento desenvolvido é dedicado a transformações entre sistemas de referência, levando-se esforços do sistema do corpo para o inercial seguindo o mesmo procedimento desenvolvido anteriormente.

Na sequência, apresenta-se inicialmente o desenvolvimento de equações gerais para forças e torques, considerando-se o cabo formado por um e três elos, com uma carga terminal, conforme mostram as Figuras 4.5 e 4.9. A carga terminal do cabo recebe forças externas nas três direções do referencial fixo ao corpo $X_c Y_c Z_c$. Essas forças externas podem também gerar torques em torno do centro de massa da carga.

4.3.1 EQUACIONAMENTO PARA O CABO COM UM ELO

Para a compreensão do processo de transformação da força no referencial do corpo para o referencial inercial é interessante trabalhar inicialmente considerando-se o cabo

com apenas um elo. Neste caso, o cabo corresponde a um pêndulo espacial simples, mas articulado a uma plataforma móvel. A Figura 4.5 ilustra essa situação e os sistemas referenciais utilizados.

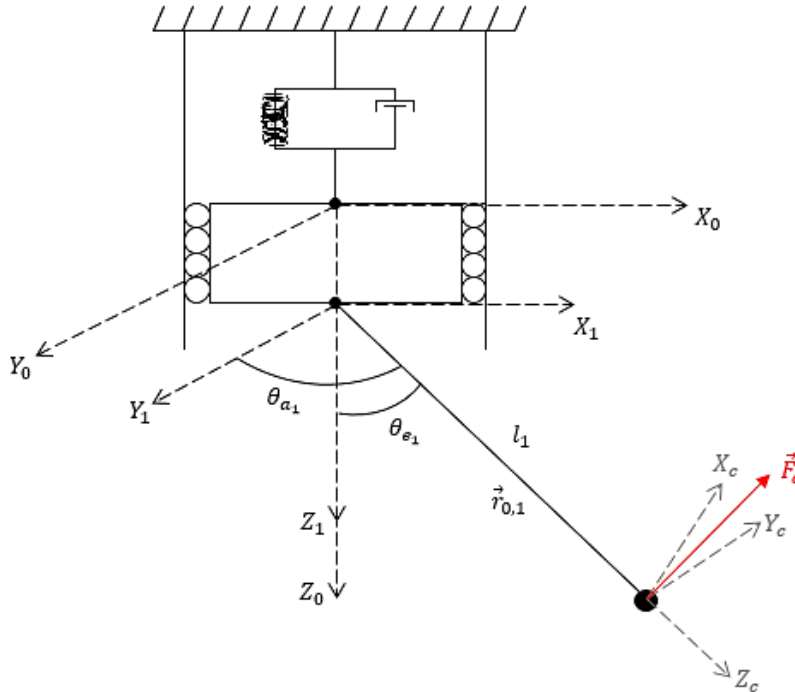


Figura 4.5 - Representação dos referenciais do corpo e inercial.

A modelagem do cabo é desenvolvida no referencial inercial $X_0Y_0Z_0$, onde o eixo Z_0 tem direção vertical para baixo, o eixo Y_0 coincidente com a direção do movimento inicial realizado pelo cabo e o eixo X_0 é perpendicular aos outros dois eixos, formando o triedro.

Para a determinação das forças e torques ao longo do cabo, produzidos pela força aplicada na carga terminal, define-se o referencial do corpo $X_cY_cZ_c$, com origem no centro de massa da carga terminal, onde o eixo Z_c é coincidente com a direção do elo fixo à carga, o eixo Y_c é paralelo à direção frontal da carga e o eixo X_c é perpendicular aos eixos Y_c e Z_c (direção transversal), como ilustrado na Figura 4.5.

Ao ativar os atuadores da carga terminal, ela entra em movimento devido a uma força resultante, denotada por \vec{F}_c , que está no referencial do corpo ($X_cY_cZ_c$). Essa força produz forças e torques sobre o cabo e pode produzir torques sobre a própria carga terminal. O torque produzido pelas forças sobre o cabo (atuante na última articulação, que, no caso da Figura 4.5, é a articulação fixa à origem do referencial inercial $X_1Y_1Z_1$),

é denotado de $\vec{\tau}_1 = (\tau_{1x}, \tau_{1y}, \tau_{1z})$ e o torque produzido pelas forças sobre a carga terminal é denotado de $\vec{\tau}_c = (\tau_{cx}, \tau_{cy}, \tau_{cz})$.

A dinâmica do cabo está no referencial inercial $X_0Y_0Z_0$ e, portanto, os torques produzidos no cabo devem estar nesse mesmo referencial. Esta força resultante atuante na carga terminal (\vec{F}_c) tem a forma: $\vec{F}_c = (F_{cx}, F_{cy}, F_{cz})$, onde cada uma das forças é formada por outras duas, ou seja, $F_{cx} = F_{cxa} + F_{cxb}$, $F_{cy} = F_{cya} + F_{cyb}$ e $F_{cz} = F_{cza} + F_{czb}$, denotando dois atuadores em cada direção.

As forças aplicadas F_{cx} , F_{cy} e F_{cz} são originadas nos atuadores, cuja disposição são dois em cada plano e a distância entre eles é de 0,15 metros (no modelo adotado no presente trabalho). P_1 e P_2 são dois atuadores no plano Y_cZ_c e estão na direção X_c e, desta forma, compondo a força F_{cx} , onde F_{cxa} é aplicada no atuador P_1 e F_{cxb} no atuador P_2 (ver Figura 4.6 (a)). P_3 e P_4 são dois atuadores no plano X_cZ_c e estão na direção Y_c , compondo a força F_{cy} , onde F_{cya} é aplicada no atuador P_3 e F_{cyb} no atuador P_4 (ver Figura 4.6 (b)). P_5 e P_6 são dois atuadores no plano X_cY_c e estão na direção Z_c , compondo a força F_{cz} , onde F_{cza} é aplicada no atuador P_5 e F_{czb} no atuador P_6 (ver Figura 4.6 (c)). Portanto, para a determinação dos torques é necessário identificar as coordenadas dos vetores \vec{F}_c e $\vec{r}_{0,1}$ no referencial inercial.

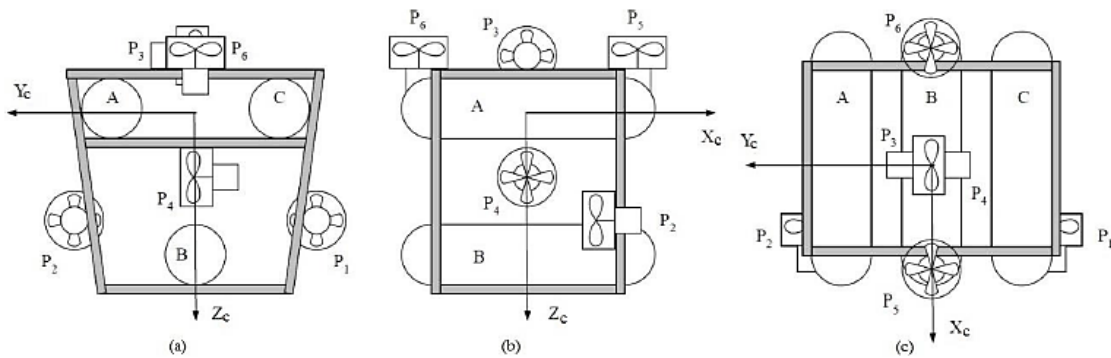


Figura 4.6 - Representação dos atuadores.

Na figura 4.5 o cabo apresenta apenas um elo e o braço de alavanca correspondente ao vetor $\vec{r}_{0,1} = (r_{0,1x}, r_{0,1y}, r_{0,1z})$, ligando a carga terminal à origem do sistema $X_1Y_1Z_1$ (paralelo ao inercial), possui a forma:

$$\vec{r}_{0,1} = \begin{cases} r_{1,0x} = -l_1 \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{a_1} \\ r_{1,0y} = -l_1 \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1} \\ r_{1,0z} = -l_1 \cos \theta_{e_1} \end{cases} \quad (4.61)$$

A força \vec{F}_c gerada ao ligar os atuadores do veículo tem suas coordenadas expressas no referencial do corpo $X_c Y_c Z_c$. Como o modelo dinâmico do cabo está no referencial inercial, é conveniente obter a força \vec{F}_c no referencial inercial, ou seja, $\vec{F}_0 = (F_{0x}, F_{0y}, F_{0z})$. Para isso faz-se necessário a utilização de transformações homogêneas, transformando inicialmente a força \vec{F}_c no referencial do corpo para o referencial da última articulação $(X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$, denotada por F_j . Como neste exemplo o cabo é composto apenas por um elo, o vetor força no referencial inercial \vec{F}_0 coincide com o vetor força do referencial da última articulação \vec{F}_j e, desta forma, $\vec{F}_j = \vec{F}_0$.

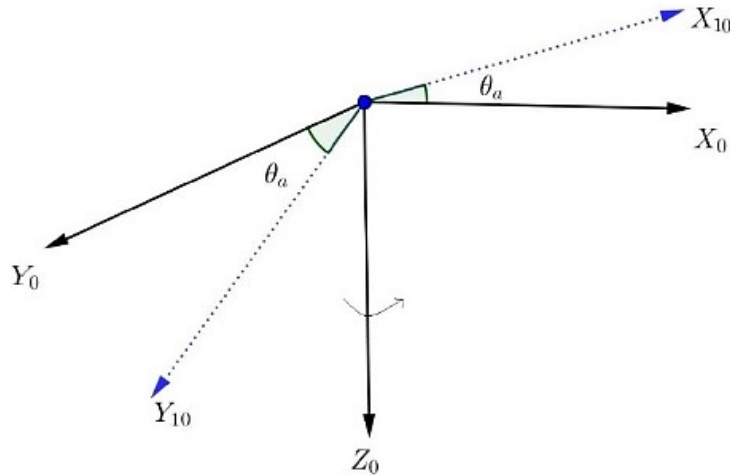


Figura 4.7 - Representação da primeira rotação.

A primeira rotação aplicada ao sistema é sobre o eixo Z_0 de um ângulo θ_a . Obtém-se um novo sistema de eixos $X_{10} Y_{10} Z_{10}$, visto na Figura 4.7. A Força \vec{F}_0 aplicada ao veículo no referencial $X_{10} Y_{10} Z_{10}$ é dada por:

$$\vec{F}_0 = R_{z,\theta_a} \vec{F}_{10} \quad (4.62)$$

onde R_{z,θ_a} é a matriz de rotação em torno de Z de um ângulo θ_a .

Em seguida aplica-se uma rotação de um ângulo θ_e sobre o eixo X_{10} , gerando-se o referencial $X_{20} Y_{20} Z_{20}$:

$$\vec{F}_{10} = R_{X,\theta_e} \vec{F}_{20} \quad (4.63)$$

onde R_{X,θ_e} é a matriz de rotação em torno do eixo X de um ângulo θ_e .

Posteriormente, realiza-se a rotação sobre o eixo Z_{20} de um ângulo $-\theta_a$, gerando o referencial $X_{30}Y_{30}Z_{30}$:

$$\vec{F}_{20} = R_{Z,-\theta_a} \vec{F}_{30} \quad (4.64)$$

onde $R_{Z,-\theta_a}$ é a matriz de rotação em torno do eixo Z de um ângulo $-\theta_a$.

Por fim, rotacionando $-\theta_T$ sobre o eixo Z_{30} , chegando-se no referencial $X_cY_cZ_c$:

$$\vec{F}_{30} = R_{Z,-\theta_T} \vec{F}_c \quad (4.65)$$

onde $R_{Z,-\theta_T}$ é a matriz de rotação em torno de Z de um ângulo $-\theta_T$.

As matrizes de rotação possuem as seguintes definições:

$$R_{Z,\theta_{a_1}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{a_1} & \text{sen } \theta_{a_1} & 0 \\ -\text{sen } \theta_{a_1} & \cos \theta_{a_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$R_{X,\theta_{e_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{e_1} & \text{sen } \theta_{e_1} \\ 0 & -\text{sen } \theta_{e_1} & \cos \theta_{e_1} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$R_{Z,-\theta_{a_1}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{a_1} & -\text{sen } \theta_{a_1} & 0 \\ \text{sen } \theta_{a_1} & \cos \theta_{a_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$R_{Z,-\theta_{T_1}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{T_1} & -\text{sen } \theta_{T_1} & 0 \\ \text{sen } \theta_{T_1} & \cos \theta_{T_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Define-se portanto o produto das matrizes de rotação por:

$$M_{01} = R_{Z,\theta_{a_1}} R_{X,\theta_{e_1}} R_{Z,-\theta_{a_1}} R_{Z,-\theta_{T_1}} \quad (4.70)$$

Logo, das equações (4.62),(4.63),(4.64) e (4.65), tem-se a força \vec{F}_0 no referencial da última articulação (neste caso, coincide também com o inercial):

$$\vec{F}_0 = R_{Z,\theta_{a_1}} R_{X,\theta_{e_1}} R_{Z,-\theta_{a_1}} R_{Z,-\theta_{T_1}} \vec{F}_c \quad (4.71)$$

Portanto, das equações (4.70) e (4.71),o vetor força \vec{F}_0 pode ser definido como:

$$\vec{F}_0 = M_{01} \vec{F}_c \quad (4.72)$$

Definido o vetor força no referencial inercial, é possível identificar os torques no referencial inercial a partir da equação (4.1) como sendo:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{F}_0 \times \vec{r}_{1,0} \quad (4.73)$$

Desta forma, o vetor de torques $\vec{\tau}_0$ pode ser escrito como:

$$\vec{\tau}_0 = \left[\begin{array}{l} (F_{0z} \sen \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1} - F_{0y} \cos \theta_{e_1}) \vec{i} + \\ + (F_{0x} \cos \theta_{e_1} - F_{0z} \sen \theta_{e_1} \sen \theta_{a_1}) \vec{j} + \\ + (F_{0y} \sen \theta_{e_1} \sen \theta_{a_1} - F_{0x} \sen \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1}) \vec{k} \end{array} \right] \quad (4.74)$$

As coordenadas do vetor de torques $\vec{\tau}_0 = (\tau_{0x}, \tau_{0y}, \tau_{0z})$, correspondem aos torques no cabo sobre os eixos X_0, Y_0 e Z_0 , respectivamente.

A carga terminal sofre torques oriundos das diferentes forças aplicadas sobre ela e produz torques sobre a última articulação. Os torques produzidos na carga terminal (referencial do corpo) são definidos por:

$$\vec{\tau}_c = (\tau_{cx}, \tau_{cy}, \tau_{cz}) \quad (4.75)$$

onde a diferença entre as forças F_{cax} e F_{cbx} na direção X_c multiplicada pela distância entre os atuadores P_1 e P_2 produz torque na carga terminal sobre o eixo Z_c , a diferença entre as forças F_{cay} e F_{cby} na direção Y_c multiplicada pela distância entre os atuadores P_3 e P_4 também produz torque na carga terminal sobre o eixo Z_c e a diferença entre as forças F_{caz} e F_{cbz} na direção Z_c multiplicada pela distância entre os atuadores P_5 e P_6 produz torque na carga terminal sobre o eixo X_c . Desta forma os torques na carga terminal nos eixos X_c, Y_c e Z_c , respectivamente, são dados por $\tau_{cx} = [(F_{cbz} - F_{caz})0,15]$, $\tau_{cy} = 0$, $\tau_{cz} = [(F_{cby} - F_{cay})0,15 + (F_{cbx} - F_{cax})0,15]$, onde 0,15 é a distância em metros entre os atuadores atuantes em um mesmo plano, na carga terminal. Os torques na carga terminal são descritos de acordo com o posicionamento dos atuadores na mesma.

Para obter os torques atuantes na carga terminal no referencial da última articulação é necessário efetuar a transformação dos torques $\vec{\tau}_c$ para a última articulação. O vetor de torques na última articulação, denotado por $\vec{\tau}_{ca} = (\tau_{cax}, \tau_{cay}, \tau_{caz})$ é obtido a partir do produto entre a matriz de rotação M_{01} e o vetor torque na carga terminal $\vec{\tau}_c$.

$$\vec{\tau}_{ca} = M_{01}\vec{\tau}_c \quad (4.76)$$

Como visto anteriormente, a partir dos torques no cabo expressos no referencial da articulação é possível identificar os torques de elevação e azimute no cabo descritos respectivamente nas equações (4.51) e (4.52).

$$\begin{aligned}\tau_{e_1} &= -\tau_{c_1x} \cos \theta_{a_1} + \tau_{c_1y} \sen \theta_{a_1} \\ \tau_{a_1} &= \tau_{c_1z}\end{aligned}$$

Neste caso, como o cabo sofre torção, é possível identificar o toque em torção, que atua na última articulação. O torque em torção na última articulação é igual ao torque produzido pela carga terminal sobre o eixo Z_c , logo:

$$\tau_{Tn} = \tau_{cz} \quad (4.77)$$

Vale ressaltar que os torques de azimute e elevação na última articulação estão em função também dos torques provocados pela carga terminal sobre esta última articulação ($\vec{\tau}_{ca}$), devendo-se isto ao acoplamento da dinâmica do próprio cabo. Desta forma, o torque de elevação e o torque de azimute na última articulação são respectivamente:

$$\tau_{ec} = -\tau_{cax} \cos \theta_{a_1} + \tau_{cay} \sen \theta_{a_1} \quad (4.78)$$

$$\tau_{ac} = \tau_{caz} \quad (4.79)$$

Como a última articulação do cabo sofre torques de elevação e azimute em função dos torques no cabo e dos torques provocados pela carga terminal, os torques de elevação e azimute na articulação n (última articulação) são, respectivamente:

$$\tau_{eu} = \tau_{e1} + \tau_{ec} \quad (4.80)$$

$$\tau_{au} = \tau_{a1} + \tau_{ac} \quad (4.81)$$

Os torques em azimute, elevação e torção entram na dinâmica do cabo somados aos torques externos, oriundos, por exemplo, de correntes oceânicas. Vale ressaltar que neste caso o cabo é constituído por apenas um elo. Os elementos deste vetor encontram-se no Apêndice B.2.

4.3.2 EQUACIONAMENTO PARA O CABO DIVIDIDO EM TRÊS ELOS

Considera-se o cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma de suas extremidades e livre em sua outra extremidade que contém a carga terminal. No presente exemplo, o cabo foi dividido em três partes rígidas, de comprimentos l_1 , l_2 e l_3 , conectadas por articulações fictícias, conforme ilustrado na Figura 4.8.

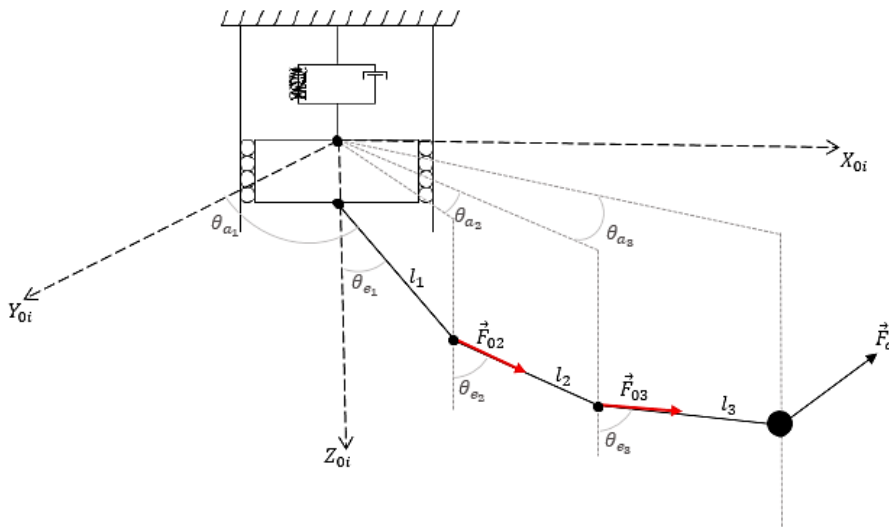


Figura 4.8 - Representação geral para o cabo dividido em três elos.

Como exemplificado na Figura 4.8, o cabo é dividido em três elos e, portanto, devem ser identificados os torques atuantes nas três articulações, devidos aos esforços originados na carga terminal. Para a obtenção dos torques no referencial da última articulação é necessária a obtenção da força \vec{F}_c (originalmente no referencial do corpo) no referencial inercial da base. Para isso, inicialmente efetua-se a transformação da força \vec{F}_c no referencial do corpo para o referencial da última articulação $X_2Y_2Z_2$. Essa transformação da força \vec{F}_c para a última articulação é de forma análoga ao que foi explicado para o caso com apenas um elo. A Figura 4.9 ilustra os sistemas de referência utilizados em cada articulação para o cabo dividido em três elos.

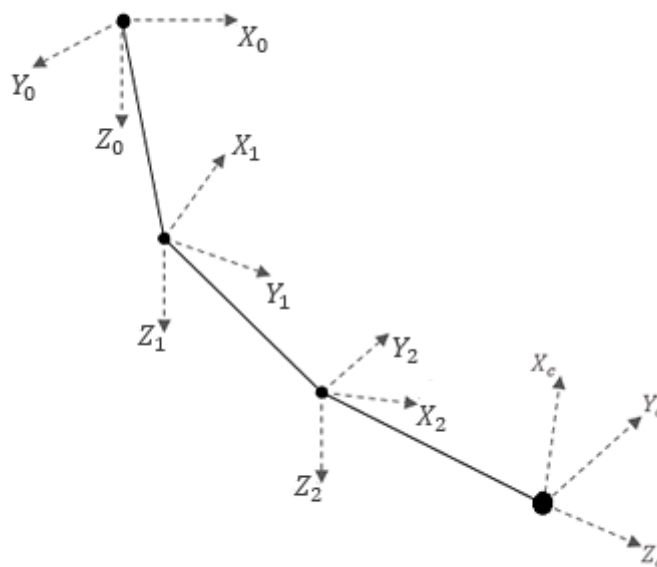


Figura 4.9 - Representação dos sistemas ao longo da cadeia, para o cabo com três elos.

A matriz de transformação do referencial do corpo $X_cY_cZ_c$ para o referencial a última articulação $X_2Y_2Z_2$, pode ser obtida a partir das quatro matrizes de rotação:

$$R_{Z,\theta_{a_3}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{a_3} & \text{sen } \theta_{a_3} & 0 \\ -\text{sen } \theta_{a_3} & \cos \theta_{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

$$R_{X,\theta_{e_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{e_3} & \text{sen } \theta_{e_3} \\ 0 & -\text{sen } \theta_{e_3} & \cos \theta_{e_3} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

$$R_{Z,-\theta_{a_3}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{a_3} & -\text{sen } \theta_{a_3} & 0 \\ \text{sen } \theta_{a_3} & \cos \theta_{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$R_{Z,-\theta_{T_3}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{T_3} & -\text{sen } \theta_{T_3} & 0 \\ \text{sen } \theta_{T_3} & \cos \theta_{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

O produto das matrizes de rotação é dado por:

$$M_{03} = R_{Z,\theta_{a_3}} \cdot R_{X,\theta_{e_3}} \cdot R_{Z,-\theta_{a_3}} \cdot R_{Z,-\theta_{T_3}} \quad (4.86)$$

A transformação do vetor força do referencial $X_C Y_C Z_C$ para o referencial $X_2 Y_2 Z_2$ (referencial da última articulação) é definida como:

$$\vec{F}_j = M_{03} \cdot \vec{F}_c \quad (4.87)$$

O vetor \vec{F}_j tem suas coordenadas expressas no referencial $X_2 Y_2 Z_2$ e deve ser transformado para o referencial inercial da base $X_0 Y_0 Z_0$. Como o cabo tem três articulações, a matriz de transformação é obtida a partir de duas rotações negativas em azimute sobre o eixo Z_2 :

$$N_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) & -\text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) & 0 \\ \text{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) & \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Portanto, a força aplicada no cabo, expressa no referencial inercial da base é dada por:

$$\vec{F}_0 = N_2 \cdot \vec{F}_j \quad (4.89)$$

Definido o vetor força no referencial inercial, pode-se determinar os torques atuantes em cada articulação, no referencial inercial, utilizando-se o mesmo procedimento desenvolvido anteriormente. Desta forma, os torques $\vec{\tau}_0$ (articulação da base), $\vec{\tau}_1$ (articulação intermediária) e $\vec{\tau}_2$ (última articulação), respectivamente, possuem as formas:

$$\vec{\tau}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} F_{0z} \operatorname{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ -F_{0y} \cos \theta_{e_3} \end{array} \right] \vec{i} + \\ + \left[\begin{array}{l} F_{0x} \cos \theta_{e_3} + \\ -F_{0z} \operatorname{sen} \theta_{e_3} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \end{array} \right] \vec{j} + \\ + \left[\begin{array}{l} F_{0y} \operatorname{sen} \theta_{e_3} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ -F_{0x} \operatorname{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \end{array} \right] \vec{k} \end{array} \right\} l_3 \quad (4.90)$$

$$\vec{\tau}_1 = \cos \alpha_3 \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} F_{0z} \operatorname{sen} \theta_{e_2} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + \\ -F_{0y} \cos \theta_{e_2} \end{array} \right] \vec{i} + \\ + \left[\begin{array}{l} F_{0x} \cos \theta_{e_2} + \\ -F_{0z} \operatorname{sen} \theta_{e_2} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \end{array} \right] \vec{j} + \\ + \left[\begin{array}{l} F_{0y} \operatorname{sen} \theta_{e_2} \operatorname{sen}(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) + \\ -F_{0x} \operatorname{sen} \theta_{e_2} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2}) \end{array} \right] \vec{k} \end{array} \right\} l_2 \quad (4.91)$$

$$\vec{\tau}_0 = \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} F_{0z} \operatorname{sen} \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1} + \\ -F_{0y} \cos \theta_{e_1} \end{array} \right] \vec{i} + \\ + \left[\begin{array}{l} F_{0x} \cos \theta_{e_1} + \\ -F_{0z} \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{a_1} \end{array} \right] \vec{j} + \\ + \left[\begin{array}{l} F_{0y} \operatorname{sen} \theta_{e_1} \operatorname{sen} \theta_{a_1} + \\ -F_{0x} \operatorname{sen} \theta_{e_1} \cos \theta_{a_1} \end{array} \right] \vec{k} \end{array} \right\} l_2 \quad (4.92)$$

Como visto anteriormente, a carga terminal sofre torques oriundos das diferentes forças aplicadas sobre ela e produz torques sobre a última articulação. Desta forma, o torque na carga terminal é descrito conforme a equação (4.75) e o torque produzido pela carga terminal na última articulação, denotado por $\vec{\tau}_{ca} = (\tau_{cax}, \tau_{cay}, \tau_{caz})$ no referencial da própria articulação é dado pelo produto da matriz de rotação M_{03} descrita na equação (4.86) e o vetor torque na carga terminal $\vec{\tau}_c$:

$$\vec{\tau}_{ca} = M_{03} \cdot \vec{\tau}_c \quad (4.93)$$

Os vetores de torques $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_0$ obtidos nas equações (4.90), (4.91) e (4.92), são transformados para o sistema da articulação, podendo assim gerar os toques de azimute e de elevação em cada articulação, como foi explicado anteriormente. Neste caso em particular, como descrito para o caso de um elo, existe o torque em torção, aplicado na

última articulação, o qual é transmitido ao restante do cabo devido ao acoplamento dinâmico do seu modelo.

Como foi visto, os torques de elevação e de azimute na última articulação estão também em função dos torques atuantes na carga terminal e que são transmitidos à última articulação. Desta forma, o torque de elevação e de azimute na última articulação provocados pela carga terminal possuem as formas:

$$\tau_{ec} = -\tau_{cax} \cos(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \tau_{cay} \sin(\theta_{a_1} + \theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \quad (4.94)$$

$$\tau_{ac} = \tau_{caz} \quad (4.95)$$

Portanto, os torques em elevação e em azimute na última articulação são, respectivamente:

$$\tau_{eu} = \tau_{e3} + \tau_{ec} \quad (4.96)$$

$$\tau_{au} = \tau_{a3} + \tau_{ac} \quad (4.97)$$

Uma vez obtidos os torques em elevação, azimute e torção, eles entram na dinâmica do cabo somados aos vetores de torques externos. Os elementos deste vetor encontram-se no Apêndice B.3.

No Capítulo V são apresentadas as equações gerais para a formação dos elementos das matrizes e vetores do modelo dinâmico. Neste capítulo serão desenvolvidos os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico com um número n qualquer de elos no qual o cabo pode ser dividido.

CAPÍTULO V
ALGORITMOS GENÉRICOS

No presente capítulo são desenvolvidos os algoritmos genéricos para a geração automática do modelo dinâmico do cabo, para um número qualquer de elos considerados para a estrutura. Conforme será visto, utiliza-se uma linguagem formal de descrição de algoritmos. Esta forma de descrever algoritmos facilita suas implementações em linguagens computacionais. Estes algoritmos foram implementados no *software* **MATLAB®**, sendo que os resultados expressos na forma de simulações são apresentados no capítulo a VI.

As equações analíticas do modelo dinâmico obtidas foram desenvolvidas também em (ZANELA [34]), que considerava a estrutura flexível vinculada a uma plataforma fixa. No presente caso, a estrutura é articulada a uma plataforma móvel. Ao comparar-se os dois modelos, foi possível verificar que estes diferenciam-se apenas pelo acréscimo de alguns elementos nas matrizes e vetores, correspondentes a mais uma primeira linha e uma primeira coluna nas matrizes, e mais um primeiro elemento nos vetores. Portanto, os algoritmos desenvolvidos em (ZANELA [34]) são integralmente aproveitados no presente trabalho, conforme será visto na sequência.

As equações analíticas dos modelos para um, dois, três e quatro elos, desenvolvidas no Capítulo III, tornaram possível identificar uma lógica de crescimento genérico para as suas diferentes matrizes e vetores.

5.1. ALGORITMO GENÉRICO PARA A MATRIZ DE INÉRCIA

Conforme mencionado anteriormente, a partir do desenvolvimento dos modelos dinâmicos para o cabo dividido em um, dois, três e quatro elos no Capítulo III, foram obtidas as respectivas matrizes de inércia, com seus elementos expressos no Apêndice A. A análise destes elementos possibilitou o entendimento de um padrão de crescimento, à medida que novos elos são adicionados na modelagem dinâmica. Sendo assim, foi possível o desenvolvimento de uma forma geral para a matriz de inércia, considerando um número de elos qualquer nos quais o cabo é dividido.

A matriz de inércia é simétrica. Portanto, o algoritmo a seguir determina os elementos da diagonal principal e os acima desta diagonal. M é a massa da estrutura

flutuante (plataforma móvel), enquanto l_i e m_i , com $i = 1, \dots, n$, correspondem, respectivamente, aos comprimentos e massas de cada elo. m_c corresponde à massa da carga terminal.

Em (ZANELA [34]), a matriz de inércia presente no modelo dinâmico possui um padrão de crescimento genérico, considerando-se n elos. Essa matriz completa possuía forma:

$$I = \begin{bmatrix} I_e & N_e & T_e \\ I_a & N_a & T_a \\ I_t & N_t & T_t \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

onde os índices e , a e t indicam elevação, azimute e torção, respectivamente. I , N e T são submatrizes quadradas de ordem n , onde n é o número de elos. Como a matriz de inércia é simétrica, tem-se:

$$I_a = N_e^t; I_t = T_e^T; N_t = T_a^T \quad (5.2)$$

Desta forma, basta que se identifiquem os algoritmos genéricos das submatrizes I_e, N_e, N_a, T_t, T_e e T_a .

Em (PEREIRA [26]) propõe-se um formalismo de modelagem que considera os movimentos de torção desacoplados com relação aos movimentos de azimute e elevação.

Desta forma, as submatrizes T_e e T_a (e conseqüentemente I_t e N_t) são nulas e a submatriz T_t é diagonal. Portanto, tem-se que:

$$T_t(i, i) = J_{ti} \quad (5.3)$$

onde J_{ti} é o momento de inércia de torção sobre o eixo longitudinal do elo i , com $i = 1, \dots, n$ e ainda:

$$T_t(n, n) = J_{tn} + J_{tc} \quad (5.4)$$

com J_{tc} equivalente ao momento de inércia sobre o eixo longitudinal de torção da carga terminal conectada à extremidade livre do cabo.

Relacionando as matrizes de inércia elaboradas para esta dissertação e comparando-as com as desenvolvidas em (ZANELA [34]), observa-se o seguinte padrão de crescimento:

Define-se M a matriz de inércia obtida. Para o cabo aproximado por um único elo, tem-se:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

onde a submatriz $\begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$ corresponde à matriz $\begin{bmatrix} I_e & N_e & T_e \\ I_a & N_a & T_a \\ I_t & N_t & T_t \end{bmatrix}$ para $n = 1$

desenvolvida por (ZANELA [34]).

Para o cabo dividido em dois elos, tem-se que:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} & M_{17} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} & M_{27} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} & M_{37} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} & M_{57} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} & M_{67} \\ M_{71} & M_{72} & M_{73} & M_{74} & M_{75} & M_{76} & M_{77} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

onde a submatriz $\begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} & M_{27} \\ M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} & M_{37} \\ M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} \\ M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} & M_{57} \\ M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} & M_{67} \\ M_{72} & M_{73} & M_{74} & M_{75} & M_{67} & M_{77} \end{bmatrix}$ corresponde à matriz

$\begin{bmatrix} I_e & N_e & T_e \\ I_a & N_a & T_a \\ I_t & N_t & T_t \end{bmatrix}$ para $n = 2$ desenvolvida por (ZANELA [34]).

Para o cabo dividido em três elos, tem-se que:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1,10} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{10,1} & M_{10,2} & \dots & M_{10,10} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

onde a submatriz $\begin{bmatrix} M_{22} & \cdots & M_{2,10} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{10,2} & \cdots & M_{10,10} \end{bmatrix}$ corresponde à matriz $\begin{bmatrix} I_e & N_e & T_e \\ I_a & N_a & T_a \\ I_t & N_t & T_t \end{bmatrix}$ para $n = 3$

desenvolvida por (ZANELA [34]).

Para o cabo dividido em quatro elos, tem-se que:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1,13} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2,13} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{13,1} & M_{13,2} & \cdots & M_{13,13} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

onde a submatriz $\begin{bmatrix} M_{22} & \cdots & M_{2,13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{13,2} & \cdots & M_{13,13} \end{bmatrix}$ corresponde à matriz $\begin{bmatrix} I_e & N_e & T_e \\ I_a & N_a & T_a \\ I_t & N_t & T_t \end{bmatrix}$ para $n = 4$

desenvolvida por (ZANELA [34]).

Observa-se que a matriz M correspondente a matriz de inércia desenvolvida na presente dissertação, difere-se da matriz I desenvolvida em (ZANELA [34]) pelo acréscimo da primeira linha e da primeira coluna independentemente do número de elos acrescentados.

Conforme já mencionado anteriormente, estas primeiras linha e coluna da matriz de inércia referem-se ao movimento da plataforma móvel, que acrescentou mais um grau de liberdade ao sistema. As equações desenvolvidas no Capítulo II, para os casos de se considerar 1, 2, 3 e 4 elos, permitiram a identificação de um padrão de crescimento para os elementos da primeira linha da matriz de inércia, iguais ao da primeira coluna em razão da simetria da matriz de inércia. Esses elementos podem ser obtidos a partir do seguinte algoritmo genérico:

para $i = 1,$
para $j = 1:n + 1,$
se $j = 1,$

$$M(i, j) = m_1 + M + n^2 m_c + \sum_{k=2}^n k^2 m_k;$$

fim se,
se $j > i,$

$$M(i, j) = - \left[\frac{j-1}{2} m_{j-1} + n m_c + \sum_{k=j}^n k m_k \right] l_{j-1} \sin \theta_{e_{j-1}}; \quad (5.9)$$

fim se,
 $M(j, i) = M(i, j);$
fim para,
fim para,

Os elementos da submatriz I_e são obtidos a partir do seguinte algoritmo genérico:

para $i = 1:n,$
para $j = i + 1:n$

$$I_e = l_i l_j \left(\frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^n m_k \right) \left[\begin{array}{c} \cos \theta_{e_i} \cos \theta_{e_j} \cos \left(\sum_{k=i+1}^j \theta_{a_k} \right) + \\ + \sin \theta_{e_i} \sin \theta_{e_j} \end{array} \right]; \quad (5.10)$$

fim para,

$$I_e(i, i) = l_i^2 \left[\frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{k=i+1}^n (m_k) \right];$$

fim para,

onde os elementos da diagonal principal da submatriz I_e coincidem com os elementos da diagonal principal da matriz completa I , ou seja, $I_e = (i, i) = I(i, i)$ para $i = 1, \dots, n$. A submatriz de inércia I_e é simétrica e, portanto, o algoritmo descrito determina apenas os elementos da sua diagonal principal e os acima desta diagonal.

No caso de se considerar a parcela de energia cinética rotacional do movimento de elevação, aos elementos da diagonal principal da submatriz I_e serão acrescentados os momentos de inércia rotacionais de elevação relativo ao elo i ($I_{R_{ei}}$) sobre os eixos transversais aos elos e passando pelos seus respectivos centros de massa, na forma:

$$I_e(\hat{i}, \hat{i}) = I_e(i, i) + I_{R_{ei}} \quad (5.11)$$

A submatriz N_e apresenta duplicação de alguns termos, de forma que o algoritmo genérico para os elementos da submatriz N_e é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \text{para } i = 1:n, \\
 & \quad \text{para } j = i:n, \\
 & \quad \quad \text{se } i \neq j, \\
 & \quad \quad \quad S = 0; \\
 & \quad \quad \quad \text{para } k = j:n, \\
 & \quad \quad \quad \quad \text{se } k \neq i, \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \text{se } i > k, \quad \gamma = 1; \text{ senão } \gamma = -1; \text{ fim se,} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad v = [i \ k]; \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad s_1 = 0; \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \text{para } g = \max(v) + 1:n, \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad s_1 = s_1 + m(g); \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \text{fim para,} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad s_2 = 0; \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{para } g = \min(v) + 1:\max(v), \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad s_2 = s_2 + \theta_{ag}; \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{fim para,} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad S = S + \gamma l_k \left[\frac{m_k}{2} + m_c + s_1 \right] \cos(\theta_{e_i}) \sin(\theta_{e_k}) \sin S_2; \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \text{fim se,} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \text{fim para,} \\
 & \quad \quad \quad N_e(i, j) = l_i S; \\
 & \quad \quad \quad \text{fim se,} \\
 & \quad \quad \text{fim para,} \\
 & \text{fim para,} \\
 & \quad \text{para } i = 1:n - 1, \\
 & \quad \quad N_e(i, j) = N_e(i, i + 1); \\
 & \quad \quad \text{fim para,} \\
 & N_e(n, n) = 0;
 \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde o elemento $N_e(n, n) = I(n, 2n) = 0$.

O algoritmo genérico para os elementos da submatriz N_a possui a forma:

para $i = 1:n$,
 para $j = i:n$,
 $S_1 = 0$;
 para $k = j:n$,
 $S_1 = S_1 + l_k^2 \left[\frac{m_k}{4} + m_c + \sum_{h=k+1}^n m_h \right] \sin^2(\theta_{k_e})$;
 fim para $k = j:n$,
 $S_2 = 0$;
 $v = [i \ j]$;
 para $k = \min(v) : n - 1$,
 $S_3 = 0$;
 para $g = j:n$,
 se $g > k$,
 $\beta = \text{calcbeta}(i, j, k)$;
 $S_3 = S_3 + \beta l_g \left[\frac{m_g}{2} + m_c + \sum_{h=g+1}^n m_h \right] \sin(\theta_{k_e}) \sin \theta_{g_e} \cos \left(\sum_{h=k+1}^g \theta_{h_e} \right)$; (5.13)
 fim se,
 fim para,
 $S_2 = S_2 + l_k S_3$;
 fim para,
 se $(i = n)$ and $(j = n)$,
 $S_2 = 0$;
 fim se,
 $N_a(i, j) = S_1 + S_2$;
 $N_a(j, i) = N_a(i, j)$;
 fim para,
fim para,

A função que determina o parâmetro β visto acima possui a seguinte estrutura:

função $\beta = \text{calcbeta}(i, j, k)$
 se $(i = 1)$ e $(j = 1)$ ou $k \geq j$,
 $\beta = 2$;
 senão,
 $\beta = 1$;
 fim se,

(5.14)

A submatriz de inércia N_a é simétrica. Portanto, o algoritmo que descreve o seu comportamento determina os elementos da sua diagonal principal e os acima desta diagonal. Os elementos abaixo da diagonal principal são determinados a partir da declaração $N_a(j, i) = N_a(i, j)$. No caso de se considerar a parcela de energia cinética rotacional em azimute, aos elementos da diagonal principal da submatriz N_a serão acrescidos os momentos de inércia rotacionais de azimute relativo ao elo i (I_{Rai}), considerados constantes no formalismo:

$$N_a(i, i) = N_a(i, i) + I_{Rai} \quad (5.15)$$

Uma vez obtidos os elementos da primeira linha e da primeira coluna da matriz M , com o algoritmo (5.9), completa-se a construção desta conhecendo-se a matriz I com os algoritmos (5.10) a (5.15), fazendo-se:

$$\begin{aligned} & \text{para } i = 2: 3n + 1, \\ & \quad \text{para } j = 2: 3n + 1, \\ & \quad \quad M(i, j) = I(i - 1, j - 1); \\ & \quad \text{fim para}, \\ & \text{fim para}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.2 ALGORITMO GENÉRICO PARA AS MATRIZES DE CONSTANTES ELÁSTICAS E DE COEFICIENTES DE ATRITO

A matriz de constantes elásticas obedece à mesma regra de formação da matriz de coeficientes de atrito. A matriz K_M , correspondente a matriz das constantes elásticas desenvolvida na presente dissertação, difere-se da matriz K desenvolvida em (ZANELA [34]) também pelo acréscimo da primeira linha e da primeira coluna, referentes ao movimento da plataforma móvel vinculada a um sistema-mola-amortecedor, gerando assim mais um grau de liberdade.

As equações desenvolvidas no Capítulo II, para os casos de se considerar 1, 2, 3 e 4 elos, permitiram a identificação de um padrão de crescimento para os elementos da primeira linha e da primeira coluna da matriz das constantes elásticas, esses elementos podem ser obtidos a partir do seguinte algoritmo genérico:

$$\begin{array}{l}
 \text{para } i = 1, \\
 \quad \text{para } j = 1:n + 1, \\
 \quad \quad \text{se } j = 1, \\
 \quad \quad \quad K_M(i, j) = K_m; \\
 \quad \quad \text{fim se,} \\
 \quad \quad \text{se } j > i, \\
 \quad \quad \quad K_M(i, j) = 0; \\
 \quad \quad \text{fim se,} \\
 \quad \quad K_M(j, i) = K_M(i, j); \\
 \quad \text{fim para,} \\
 \text{fim para,}
 \end{array} \tag{5.17}$$

onde K_m é a constante elástica atuante na plataforma móvel.

Em (ZANELA [34]) a matriz de constantes elásticas (K) e de coeficientes de atrito (C) são diagonais por bloco e em cada bloco há uma submatriz $n \times n$, onde n é o número de elos. Essas matrizes podem ser escritas da seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 \\ 0 & K_a & 0 \\ 0 & 0 & K_t \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_e & 0 & 0 \\ 0 & C_a & 0 \\ 0 & 0 & C_t \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

onde K_e , K_a , K_t são respectivamente submatrizes de constantes elásticas relativas aos movimentos de elevação, azimute e torção, e C_e , C_a , C_t são respectivamente submatrizes de coeficientes de atrito relativos aos movimentos de elevação, azimute e torção.

O algoritmo a seguir determina os elementos da submatriz K_e :

```

para i = 1:n,
  para j = 1:n,
     $K_e(i,j) = 0;$ 
    se ( i = j ) e ( i < n ),
       $K_e(i,j) = K_{e_i} + K_{e_{i+1}};$ 
    fim se,
    se ( i = j ) e ( i = n ),
       $K_e(i,j) = K_{e_i};$ 
    fim se,
    se j = i + 1,
       $K_e(i,j) = K_{e_j};$ 
    fim se,
     $K_e(j,i) = K_e(i,j)$ 
  fim para,
fim para,

```

(5.19)

O algoritmo descrito é aplicado tanto às submatrizes de constantes elásticas quanto às submatrizes de coeficientes de atrito, já que possuem a mesma regra de formação.

Uma vez obtidos os elementos da primeira linha e da primeira coluna da matriz K_M , com o algoritmo (5.17), completa-se a construção desta conhecendo-se a matriz K com o algoritmo (5.19), fazendo-se:

```

para i = 2: 3n + 1,
  para j = 2: 3n + 1,
     $K_M(i,j) = K_e(i - 1, j - 1);$ 
  fim para,
fim para,

```

(5.20)

5.3 ALGORITMO GENÉRICO PARA O VETOR CORIOLIS-CENTRÍFUGOS

Em (ZANELA [34]) o vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos possui um padrão de crescimento genérico e tem $3n$ componentes, onde n é o número de elos. As primeiras n componentes são relativas aos movimentos de elevação, as n intermediárias componentes são relativas aos movimentos de azimute e as n últimas componentes são relativas aos movimentos de torção (essas últimas n componentes são nulas).

Seguindo a mesma relação desenvolvida para a matriz de inércia, observa-se que o vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos, difere-se do vetor obtido por (ZANELA [34]) no acréscimo de um primeiro elemento. Observando-se este primeiro elemento nos modelos desenvolvido no Capítulo II para 1, 2, 3 e 4 elos, foi possível identificar um padrão de crescimento para o mesmo, representado a seguir no seguinte algoritmo:

para $i = 1:n$,

$$F_1 = - \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{im_i}{2} + nm_c + \sum_{k=i+1}^n km_k \right] l_i \cos(\theta_{e_i}) \dot{\theta}_{e_i}^2 \right\}; \quad (5.21)$$

fim para,

Assim, o vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos é escrito da seguinte forma:

$$\vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) = [F_1 \ f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n \ f_{n+1} \ f_{n+2} \ \cdots \ f_{2n} \ f_{2n+1} \ f_{2n+2} \ \cdots \ f_{3n}]^T \quad (5.22)$$

As componentes $[f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n]^T$ correspondem aos movimentos de elevação, sendo que cada componente $f_i (i = 1, \dots, n)$ é composta por dois termos, na forma:

$$f_i = v_1 + v_2 \quad (5.23)$$

O termo v_1 possui a seguinte equação geral:

$$v_1 = \alpha l_i^2 \left[\frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{g=i+1}^n m_g \right] \sin(\theta_{e_i}) \cos(\theta_{e_i}) \left\{ \left(\sum_{g=1}^{i-1} \dot{\theta}_{a_g} \sum_{h=g+1}^i \dot{\theta}_{a_h} \right) + \frac{1}{|\alpha|} \left(\sum_{g=1}^i \dot{\theta}_{a_g}^2 \right) \right\} \quad (5.24)$$

Na equação (5.24), α é um parâmetro que depende dos valores de $i = 1, \dots, n$, na forma:

$$\begin{aligned} & \text{se } i = 1, \\ & \quad \alpha = -1; \\ & \text{senão se } i \neq 1, \\ & \quad \alpha = -2; \\ & \text{fim se,} \end{aligned} \quad (5.25)$$

O termo v_2 possui produtos $l_i l_j$, para $j \neq i$. Este termo pode ser determinado a partir da seguinte equação geral:

$$v_2 = l_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left\{ \begin{aligned} & \beta l_j \left(\frac{m_{\max(i,j)}}{2} + m_c + \sum_{g=\max(i,j)+1}^n m_g \right) \left[\cos(\theta_{e_i}) \left[\cos(\theta_{e_j}) \sin \left(\sum_{g=\min(i,j)}^{\max(i,j)} \theta_{a_g} \right) \dot{\theta}_{e_j} \left(\sum_{g=1}^j \dot{\theta}_{a_g} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sin(\beta) \left(\sin(\theta_{e_j}) \cos \left(\sum_{g=\min(i,j)}^{\max(i,j)} \theta_{a_g} \right) \left(\sum_{g=1}^{j-1} \dot{\theta}_{a_g} \sum_{h=g+1}^j \dot{\theta}_{a_h} + \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_{e_j}^2 + \sum_{g=1}^j \dot{\theta}_{a_g}^2 \right) \right) \right] \right] + \\ & \quad \left. + \frac{1}{\beta} (\theta_{e_i}) \cos(\theta_{e_j}) \dot{\theta}_{e_j}^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Na equação (5.26), β é um parâmetro que depende dos valores de i e j , na forma:

$$\begin{aligned} & \text{se } i > j, \\ & \quad \beta = 2; \\ & \text{senão se } i \leq j, \\ & \quad \beta = -2; \\ & \text{fim se,} \end{aligned} \quad (5.27)$$

As componentes $[f_{n+1} \ f_{n+2} \ \dots \ f_{2n}]^T$ correspondem aos movimentos de azimute. Como essas componentes possuem um maior nível de complexidade, elas são apresentadas na forma modular. Para isso, inicialmente é feita uma mudança de variável, para uma melhor apresentação dos resultados. Define-se:

$$z_i = f_{n+i} \quad (5.28)$$

($i = 1, \dots, n$). Desta forma, os elementos do vetor $[f_{n+1} \ f_{n+2} \ \dots \ f_{2n}]^T$ serão equivalentes aos elementos do vetor $[z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T$. O vetor das componente em azimute $\vec{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T$ é definido a partir da equação:

$$\vec{z} = \vec{R} + W\vec{P} \quad (5.29)$$

onde \vec{R} é um vetor $n \times 1$ que contém termos funções dos l_i^2 , W é uma matriz $n \times q$ cujos elementos são funções dos ângulos e das velocidades angulares de azimute e elevação e \vec{P} é um vetor $q \times 1$ que contém produtos do tipo $l_i l_j$, para $j > i$. Vale ressaltar que n é o número de elos e q é obtido em função de n , como apresentado no algoritmo a seguir:

$$\begin{aligned} q &= 0; \\ \text{para } i &= 1:n, \\ \quad \text{para } j &= i+1:n, \\ \quad \quad q &= q+1; \\ \quad \text{fim para}, \\ \text{fim para}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

O vetor \vec{R} tem seus elementos R_i ($i = 1, \dots, n$) definidos na forma:

$$R_i = + \sum_{k=1}^n l_k^2 \left(\frac{m_k}{4} + m_c + \sum_{g=k+1}^n m_g \right) \sin(\theta_{e_k}) \cos(\theta_{e_k}) \left(\sum_{g=1}^n \dot{\theta}_{a_g} \right) \dot{\theta}_{a_k} \quad (5.31)$$

O vetor \vec{P} tem seus elementos P_u ($u = 1, \dots, q$) definidos na forma:

$$\begin{aligned}
 &u = 0; \\
 &\text{para } i = 1:n, \\
 &\quad \text{para } j = i + 1:n, \\
 &\quad\quad u = u + 1; \\
 &\quad\quad P_u = 2l_i l_j \left[\frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{g=j+1}^n m_g \right]; \\
 &\quad \text{fim para,} \\
 &\text{fim para,}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

A matriz W possui a seguinte forma:

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & \cdots & W_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & \cdots & W_{nq} \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

onde cada elemento da matriz W na equação (5.33) é formado a partir da soma de outros três elementos:

$$w_{k,u} = a_{k,u} + b_{k,u} + c_{k,u} \tag{5.34}$$

Os elementos $a_{k,u}$, $b_{k,u}$ e $c_{k,u}$, são determinados a partir do algoritmo:

para $k = 1:n$,

$u = 0$;

para $i = 1:n - 1$,

para $j = i + 1:n$,

$u = u + 1$;

se $i \geq k$,

se $i < k$,

$$c_{k,u} = \sin(\theta_{e_i}) \sin(\theta_{e_j}) \sin\left(\sum_{g=i+1}^{j-1} \theta_{a_g}\right) \vartheta_1(\dot{\theta}_e, \dot{\theta}_a, i, j);$$

senão,

$$c_{k,u} = \sin(\theta_{e_i}) \sin(\theta_{e_j}) \sin\left(\sum_{g=i+1}^j \theta_{a_g}\right) \vartheta_2(\dot{\theta}_e, \dot{\theta}_a, i, j);$$

fim se,

senão,

$c_{k,u} = 0$;

fim se,

se ($k = 1$) ou ($k \geq 2$) e ($k < n$) e ($i \geq k$),

(5.35)

$$b_{k,u} = \sin(\theta_{e_i}) \cos(\theta_{e_j}) \cos\left(\sum_{g=i+1}^j \theta_{a_g}\right) \left[\sum_{g=1}^j \dot{\theta}_{a_g}\right] \dot{\theta}_{e_j};$$

senão,

$b_{k,u} = 0$

fim se,

se $j > k$,

$$a_{k,u} = \cos(\theta_{e_i}) \sin(\theta_{e_j}) \cos\left(\sum_{g=i+1}^j \theta_{a_g}\right) \left[\sum_{g=1}^j \dot{\theta}_{a_g}\right] \dot{\theta}_{e_j};$$

senão,

$a_{k,u} = 0$;

fim se,

$w_{k,u} = a_{k,u} + b_{k,u} + c_{k,u}$;

fim para,

fim para,

fim para,

Existem duas diferentes formas para os elementos $c_{k,u}$, dependentes das funções $\vartheta_1(\dot{\theta}_e, \dot{\theta}_a, i, j)$ e $\vartheta_2(\dot{\theta}_e, \dot{\theta}_a, i, j)$, descritas nas formas:

$$\vartheta_1 = + \left\{ \left(\sum_{g=1}^{j-1} \dot{\theta}_{a_g} \right) \left(\sum_{h=g+1}^j \dot{\theta}_{a_h} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{h=g+1}^j \dot{\theta}_{a_g} \right) + \dot{\theta}_{e_j}^2 - \dot{\theta}_{e_i}^2 \right] \right\} \quad (5.36)$$

$$\vartheta_2 = - \left\{ \left(\sum_{g=1}^{j-1} \dot{\theta}_{a_g} \right) \left(\sum_{h=g+1}^j \dot{\theta}_{a_h} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{h=g+1}^j \dot{\theta}_{a_g} \right) + \dot{\theta}_{e_i}^2 \right] \right\} \quad (5.37)$$

5.4 ALGORITMOS GENÉRICOS PARA O VETOR DE TORQUES GRAVITACIONAIS

O vetor gravitacional só tem as n primeiras componentes diferentes de zero, pois o mesmo é influenciado apenas pelos deslocamentos em elevação. Seguindo a mesma relação desenvolvida para a matriz de inércia, observa-se que o vetor gravitacional, difere-se do vetor obtido por (ZANELA [34]) no acréscimo de um primeiro elemento. Novamente, a observação dos modelos obtidos no Capítulo II permitiu identificar o seu padrão de crescimento com o acréscimo do número de elos, padrão este descrito na seguinte equação:

$$G_1 = - \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) g; \quad (5.38)$$

Desta forma, o vetor gravitacional é escrito como:

$$\vec{G}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) = [G_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n \ g_{n+1} = 0 \ \dots \ g_{2n} = 0 \ g_{2n+1} = 0 \ \dots \ g_{3n} = 0]^T \quad (5.39)$$

As n componentes (g_i) do vetor gravitacional são determinadas a partir do algoritmo:

para $i = 1:n$,

$$g_i = l_i \left(\frac{m_i}{2} + \sum_{k=i+1}^n m_k \right) g \sin \theta_{e_i};$$

fim para,

(5.40)

5.5 ALGORITMOS GENÉRICOS PARA AS FORÇAS NA CARGA TERMINAL

As equações analíticas para o desenvolvimento dos torques da estrutura flexível quando são aplicados esforços externos à carga terminal considerada puntual permitiram a identificação de um padrão de crescimento, para o caso de se considerar um número n qualquer de elos.

Tomando-se como base este padrão, construiu-se então um algoritmo para a determinação dos torques em cada uma das n articulações, mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{co} &= [F_{cox}; F_{coy}; F_{coz}]; \\
\vec{F} &= \vec{F}_{co}; \\
P_1 &= 1; \\
\text{para } i &= n: -1: 1, \\
\tau_{x(i-1)} &= P_1 \left[F_{coz} \sin(\theta_{e_i}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right) - F_{coy} \cos(\theta_{e_i}) \right] l_i; \\
\tau_{y(i-1)} &= P_1 \left[F_{cox} \cos(\theta_{e_i}) - F_{coz} \sin(\theta_{e_i}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right) \right] l_i; \\
\tau_{z(i-1)} &= P_1 \left[F_{coy} \sin(\theta_{e_i}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right) - F_{cox} \sin(\theta_{e_i}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right) \right] l_i; \\
\vec{\tau}_{i-1} &= [\tau_{x(i-1)}; \tau_{y(i-1)}; \tau_{z(i-1)}]; \\
R_{(n-1)} &= \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right) & -\sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right) & 0; \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right) & \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right) & 0; 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (5.41) \\
\vec{\tau}_{c(i-1)} &= R_{(n-1)}^T \tau_{(i-1)} = [\vec{\tau}_{cx(i-1)}; \vec{\tau}_{cy(i-1)}; \vec{\tau}_{cz(i-1)}]; \\
\mu_x &= \sin(\theta_{e_i}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right); \mu_y = \sin(\theta_{e_i}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{a_k}\right); \mu_z = \cos(\theta_{e_i}); \\
\vec{\mu} &= [\mu_x; \mu_y; \mu_z]; \\
\text{se } |\vec{F}| &= 0, \quad |\vec{F}| = 1e - 12; \quad \text{fim se,} \\
\vec{F} &= \vec{F}_{abs} \left(\frac{\vec{F}^T \cdot \vec{\mu}}{|\vec{F}|} \right); \\
\vec{P}_1 &= \vec{P}_1 \text{abs} \left(\frac{\vec{F}^T \cdot \vec{\mu}}{|\vec{F}|} \right); \\
\text{fim para,}
\end{aligned}$$

onde θ_{e_i} são ângulos de elevação e θ_{a_k} são ângulos de azimute, $i = 1, \dots, n$.

Os algoritmos a seguir são acoplados a este algoritmo, já que o objetivo é aplicar forças e torques na carga terminal, escritos no referencial do corpo e transformá-los para o referencial inercial, pois as forças e torques atuantes ao longo da cadeia estão no referencial inercial, como visto anteriormente. Desta forma, foi necessária a criação de dois algoritmos, um que transforma as forças e torques aplicados a carga terminal no referencial do corpo para o referencial inercial e outro para a determinação dos torques em cada uma das n articulações.

A transformação das forças e torques aplicados no referencial do corpo para o referencial inercial é obtida a partir do algoritmo:

$$\begin{aligned}
F_x &= [F_{ca}x + F_{cb}x; F_{ca}y + F_{cb}y; F_{ca}z + F_{cb}z]; \\
\tau_{cx} &= (F_{cb}z - F_{ca}z)0.15; \\
\tau_{cy} &= 0; \\
\tau_{cz} &= (F_{cb}y - F_{ca}y)0.15 + (F_{cb}x - F_{ca}x)0.15; \\
\tau_{tn} &= \tau_{cz}; \\
\tau_c &= [\tau_{cx}; \tau_{cy}; \tau_{cz}]; \\
R_{z,\theta_{a_n}} &= [\cos(\theta_{a_n}) \quad \sin(\theta_{a_n}) \quad 0; -\sin(\theta_{a_n}) \quad \cos(\theta_{a_n}) \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1]; \\
R_{x,\theta_{e_n}} &= [1 \quad 0 \quad 0; 0 \quad \cos(\theta_{e_n}) \quad \sin(\theta_{e_n}) \quad 0; 0 \quad -\sin(\theta_{e_n}) \quad \cos(\theta_{e_n})]; \\
R_{z,-\theta_{a_n}} &= [\cos(\theta_{a_n}) \quad -\sin(\theta_{a_n}) \quad 0; \sin(\theta_{a_n}) \quad \cos(\theta_{a_n}) \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1]; \\
R_{z,-\theta_{t_n}} &= [\cos(\theta_{t_n}) \quad -\sin(\theta_{t_n}) \quad 0; \sin(\theta_{t_n}) \quad \cos(\theta_{t_n}) \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1]; \\
M_{0n} &= R_{z,\theta_{a_n}} R_{x,\theta_{e_n}} R_{z,-\theta_{a_n}} R_{z,-\theta_{t_n}}; \\
F_j &= M_{0n} F_c; \\
\tau_{ca} &= M_{0n} \tau_{cr} = [\tau_{cax}; \tau_{cay}; \tau_{caz}]; \\
N_{n-1} &= \left[\cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{a_i}\right) \quad -\sin\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{a_i}\right) \quad 0; \sin\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{a_i}\right) \quad \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{a_i}\right) \quad 0; 0 \quad 0 \quad 1 \right]; \\
F_{c0} &= N_{n-1} F_j;
\end{aligned} \tag{5.42}$$

onde θ_{a_n} , θ_{e_n} e θ_{t_n} , são, respectivamente, os ângulos de azimute , elevação e torção no último elo.

Os torques atuantes em cada uma das n articulações fictícias são obtidos a partir do algoritmo a seguir, o qual já havia sido definido anteriormente, mas que, no caso atual, foi modificado para a inclusão do torque sobre a carga terminal:

$$\vec{F}_{co} = [F_{cox}; F_{coy}; F_{coz}];$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{co};$$

$$P_1 = 1;$$

para $i = n: -1: 1$,

$$\tau_{x(i-1)} = P_1 \left[F_{coz} \sin(\theta_{ei}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) - F_{coy} \cos(\theta_{ei}) \right] l_i;$$

$$\tau_{y(i-1)} = P_1 \left[F_{cox} \cos(\theta_{ei}) - F_{coz} \sin(\theta_{ei}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) \right] l_i;$$

$$\tau_{z(i-1)} = P_1 \left[F_{coy} \sin(\theta_{ei}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) - F_{cox} \sin(\theta_{ei}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) \right] l_i;$$

$$\vec{\tau}_{i-1} = [\tau_{x(i-1)}; \tau_{y(i-1)}; \tau_{z(i-1)}];$$

$$R_{(n-1)} = \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & -\sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & 0 & \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\tau}_{c(i-1)} = R_{(n-1)}^T \tau_{(i-1)} = [\tau_{cx(i-1)}; \tau_{cy(i-1)}; \tau_{cz(i-1)}];$$

$$\tau_{ai} = \tau_{cz(i-1)};$$

$$\tau_{ei} = -\tau_{cx(i-1)} \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right) + \tau_{cy(i-1)} \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right); \quad (5.43)$$

se $i = n$;

$$\tau_{ec} = -\tau_{cax} \cos(\theta_{ai}) + \tau_{cay} \sin(\theta_{ai});$$

$$\tau_{ac} = \tau_{caz};$$

$$\tau_{eu} = \tau_{ei} + \tau_{ec};$$

$$\tau_{au} = \tau_{ai} + \tau_{ac};$$

fim se,

$$\mu_x = \sin(\theta_{ei}) \sin\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right); \mu_y = \sin(\theta_{ei}) \cos\left(\sum_{k=1}^i \theta_{ak}\right); \mu_z = \cos(\theta_{ei});$$

$$\vec{\mu} = [\mu_x; \mu_y; \mu_z];$$

se $|\vec{F}| = 0$, $|\vec{F}| = 1e-12$; fim se,

$$\vec{F} = \vec{F}_{abs} \left(\frac{\vec{F}^T \cdot \vec{\mu}}{|\vec{F}|} \right);$$

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_1_{abs} \left(\frac{\vec{F}^T \cdot \vec{\mu}}{|\vec{F}|} \right);$$

fim para,

onde θ_{ei} são ângulos de elevação, θ_{ak} são ângulos de azimute, $R_{(n-1)}$ é a matriz de transformação para o sistema da última articulação e $\vec{\tau}_{c(i-1)}$ é o vetor de torque produzido pelas forças sobre o cabo definido no sistema da articulação.

No Capítulo VI são apresentadas as simulações computacionais realizadas, que permitiram a verificação qualitativa dos algoritmos genéricos obtidos, para os casos estudados nesta dissertação.

CAPÍTULO VI
SIMULAÇÕES

No presente capítulo serão mostradas algumas simulações realizadas com os algoritmos genéricos obtidos no capítulo anterior. O objetivo é verificar se os modelos dinâmicos permitem reproduzir em simulações resultados fisicamente esperados.

As simulações consideraram três casos e para cada um foram realizadas simulações para quando não se aplicam forças na plataforma móvel e quando estas forças são aplicadas. Todas as simulações apresentadas foram realizadas sob a ação do arrasto hidrodinâmico e empuxo. No primeiro caso, considera-se o cabo articulado a uma estrutura flutuante em uma das suas extremidades e livre na outra. O segundo caso difere do primeiro apenas na fixação da segunda extremidade ao fundo do oceano, utilizando-se forças de vínculos aplicadas à carga terminal. No terceiro caso considera-se o cabo articulado a uma estrutura flutuante e com forças aplicadas à carga terminal, esta considerada livre para se movimentar.

Os tópicos deste capítulo tratam de cada uma destas três situações. Em cada um destes é explicado como foram realizadas todas as simulações, bem como os parâmetros físicos específicos considerados.

Ao final do Capítulo, apresenta-se a equação da Catenária, a fim de realizar uma comparação entre o modelo dinâmico desenvolvido na presente dissertação, com o modelo analítico obtido para a Catenária, quando se considera o equilíbrio estático final, no caso da carga terminal fixa ao fundo do oceano.

Para todas as simulações, os parâmetros físicos gerais adotados são mostrados a seguir, na Tabela 6.1. Alguns outros parâmetros de cada caso serão especificados, quando necessário.

Tabela 6.1 - Parâmetros físicos gerais adotados para os modelos dinâmicos.

Parâmetro	Valor numérico (unidade)	Significado físico
l	1200(m)	Comprimento do cabo
n	14, 16, 22	Número de elos
r_i	0,01(m)	Raio de cada elo (constante)
l_i	$\frac{l}{n}$ (m)	Comprimento de cada elo
m_e	7850 (kg/m ³)	Massa específica do cabo
m_{ea}	1000 (kg/m ³)	Massa específica da água
m_i	$\pi r_i^2 l_i m_e$ (kg)	Massa de cada elo
I_{Re}	$\frac{m_i}{12} l_i^2$ (kg/m ²)	Momento de inercia rotacional de elevação para cada elo
I_{Ra}	$I_{Re} [0,9 \text{sen}(\theta_{e_i}) + 0,1]$ (kg/m ²)	Momento de inercia rotacional de azimute para cada elo
I_{RT}	$\frac{m_i}{2} r_i^2$ (kg/m ²)	Momento de inercia rotacional de torção para cada elo
E_y	$8 \cdot 10^{10}$ (N/m ²)	Módulo de Young
I_{sec}	$\frac{1}{4} \pi r_i^4$ (m ⁴)	Inércia da seção da reta
c_e	$33n \left(\frac{Nms}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito estrutural de elevação
c_a	$33n \left(\frac{Nms}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito estrutural de azimute
c_T	$0,83n \left(\frac{Nms}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito estrutural de torção
k_e	$\frac{5}{6} n E_y \frac{I_{sec}}{l} \left(\frac{Nm}{rd} \right)$	Constante elástica de elevação
k_a	Zero	Constante elástica de azimute
k_T	$50k_e \left(\frac{Nms}{rd} \right)$	Constante elástica de torção
c_v	$600 \left(\frac{Ns^2}{m^2} \right)$	Coefficiente de arrasto hidrodinâmico
g	9,81(m/s ²)	Aceleração gravitacional

6.1 PRIMEIRA SITUAÇÃO – CARGA TERMINAL LIVRE

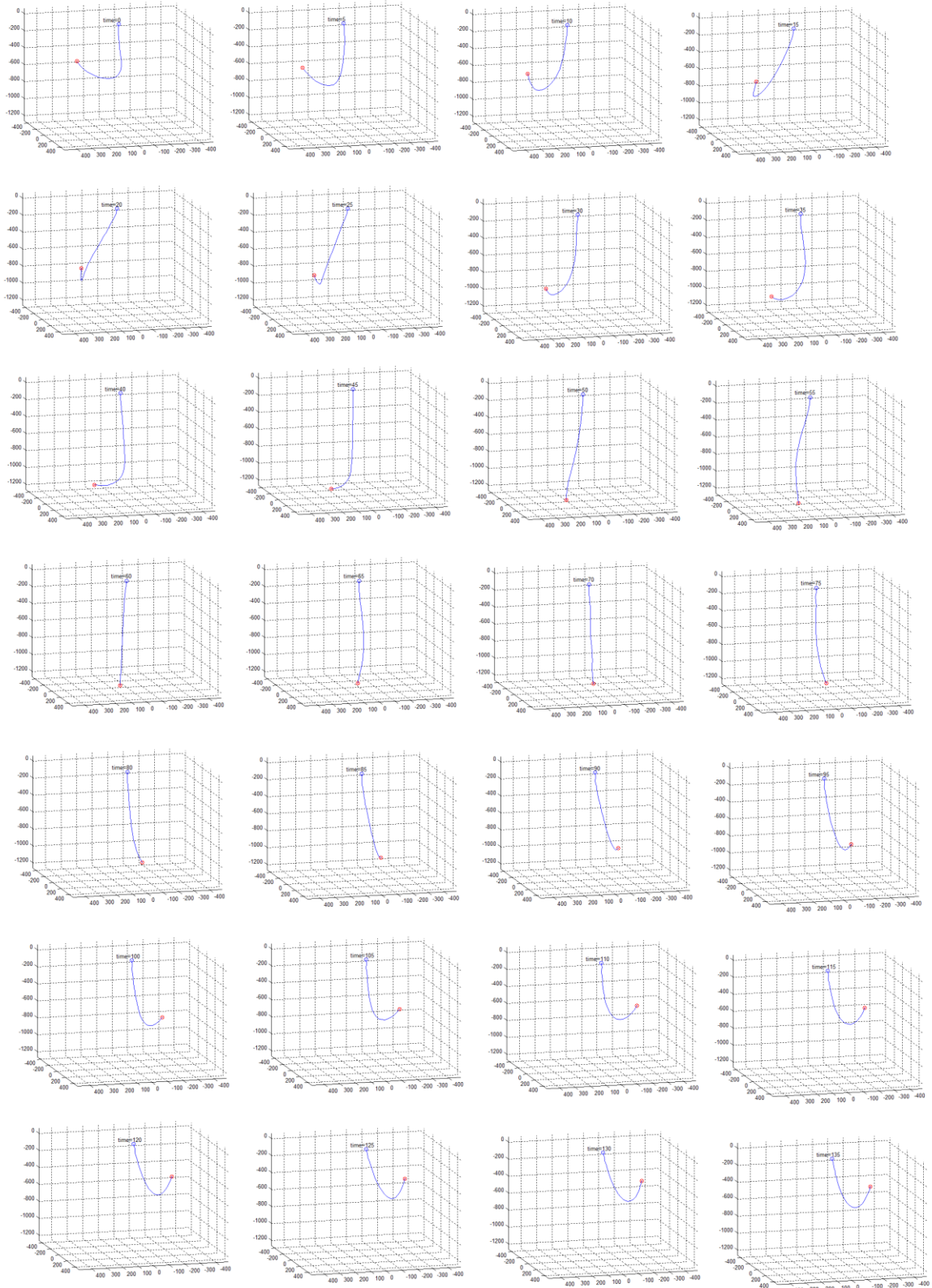
Para a primeira situação a carga terminal é livre. Serão consideradas duas situações: inexistência de forças na plataforma móvel; forças aplicadas à plataforma móvel.

Nas simulações foram especificados os seguintes parâmetros físicos adicionais:

Tabela 6.2 - Parâmetros adotados para as simulações da primeira situação.

Parâmetro	Valor numérico	Significado físico
n	22	Número de elos
M	200(kg)	Massa da estrutura flutuante
m_c	60(kg)	Massa da carga terminal
k_m	5400 $\left(\frac{Nm}{rd}\right)$	Constante elástica da estrutura flutuante
c_m	12600 $\left(\frac{Nms}{rd}\right)$	Coefficiente de atrito da estrutura flutuante
I_{R_c}	50(kgm ²)	Momento de inercia rotacional da carga terminal

A primeira simulação consiste no cabo solto em sua extremidade livre, a partir de uma configuração espacial inicial, saindo do repouso para uma situação de queda livre e inserido em um meio aquático com a ação do arrasto hidrodinâmico e do empuxo, além da aceleração gravitacional. Para essa simulação não são consideradas forças aplicadas na plataforma móvel. A Figura 6.1 ilustra a movimentação espacial do cabo. Considera-se o tempo final de simulação de 255 s e *frames* mostrados a cada 5 s. A Figura 6.2 ilustra a trajetória da carga terminal. O símbolo “o” marca o início do deslocamento e “x” o final do mesmo. A Figura 6.3 ilustra a posição da plataforma móvel para esta situação.



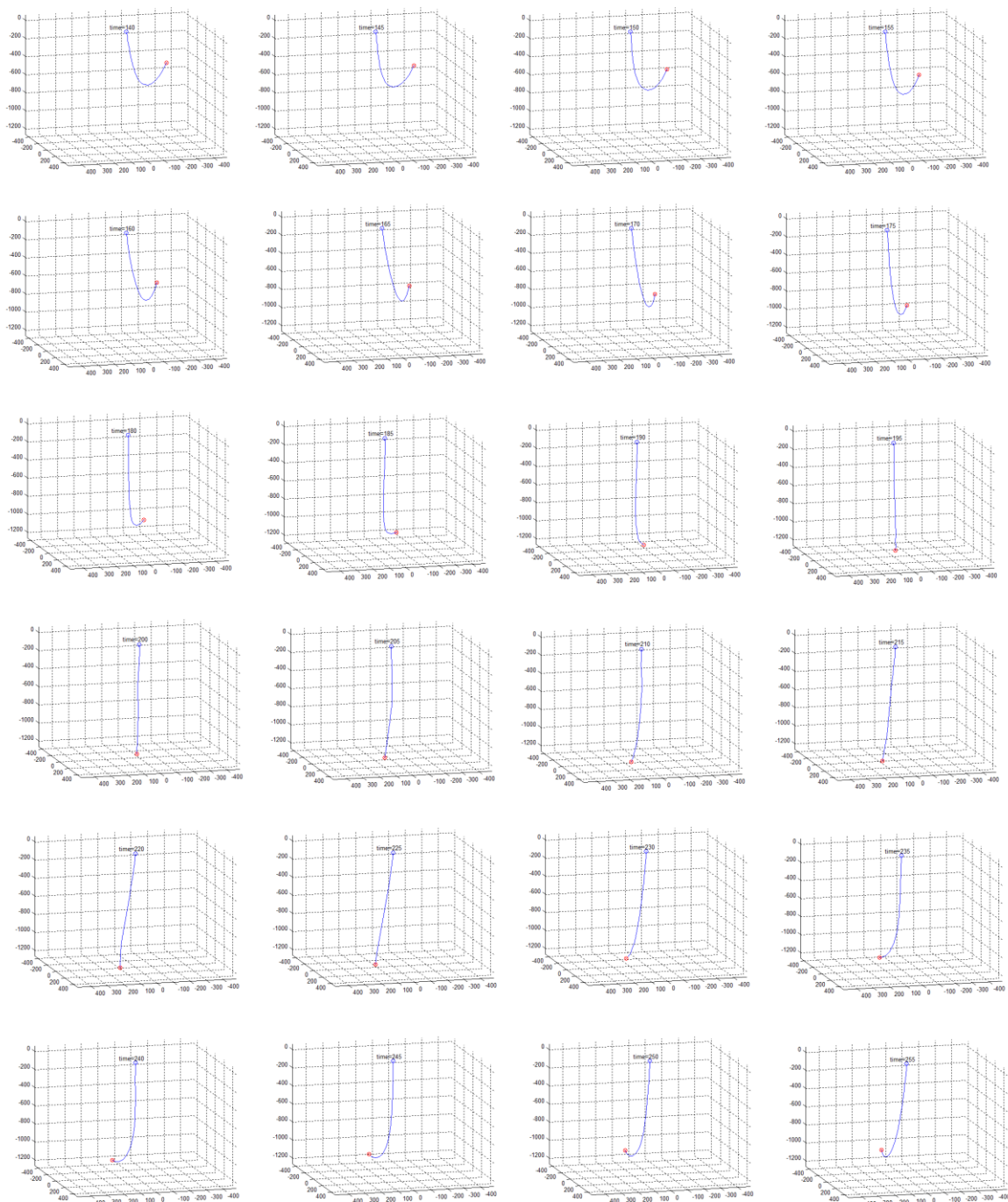


Figura 6.1 - Primeira simulação da primeira situação: 22 elos; sem forças na plataforma móvel; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.

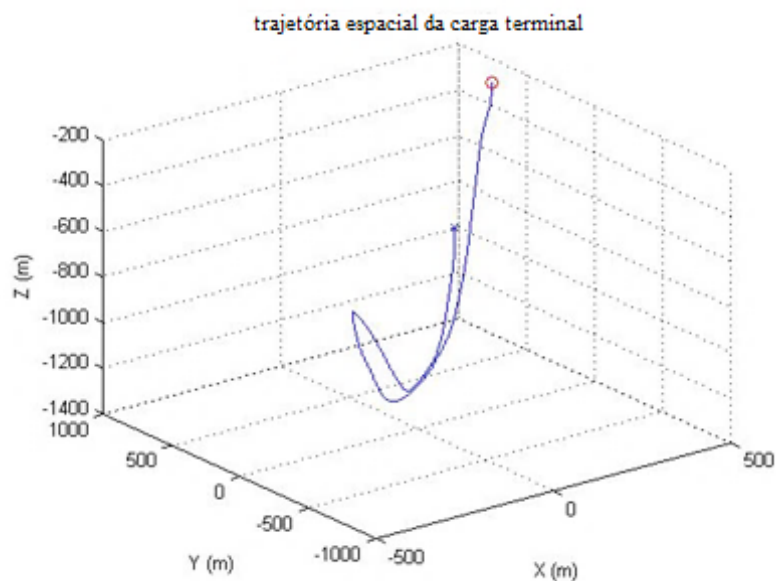


Figura 6.2 - Trajetória da carga terminal; sem forças aplicadas na plataforma móvel.

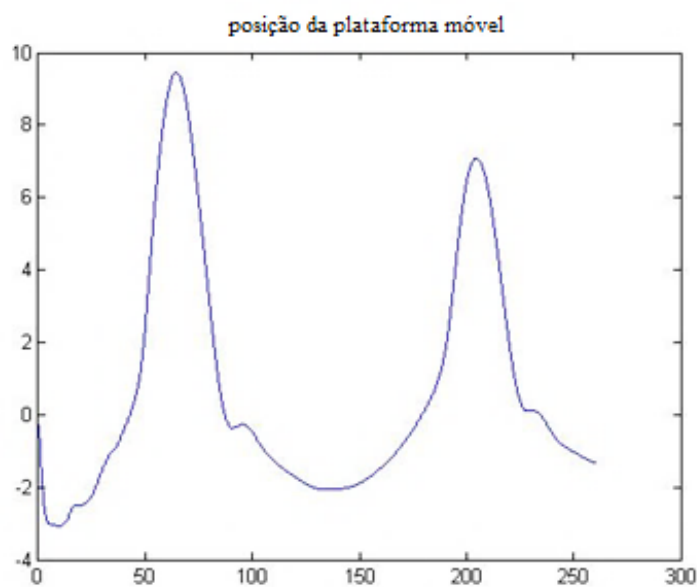
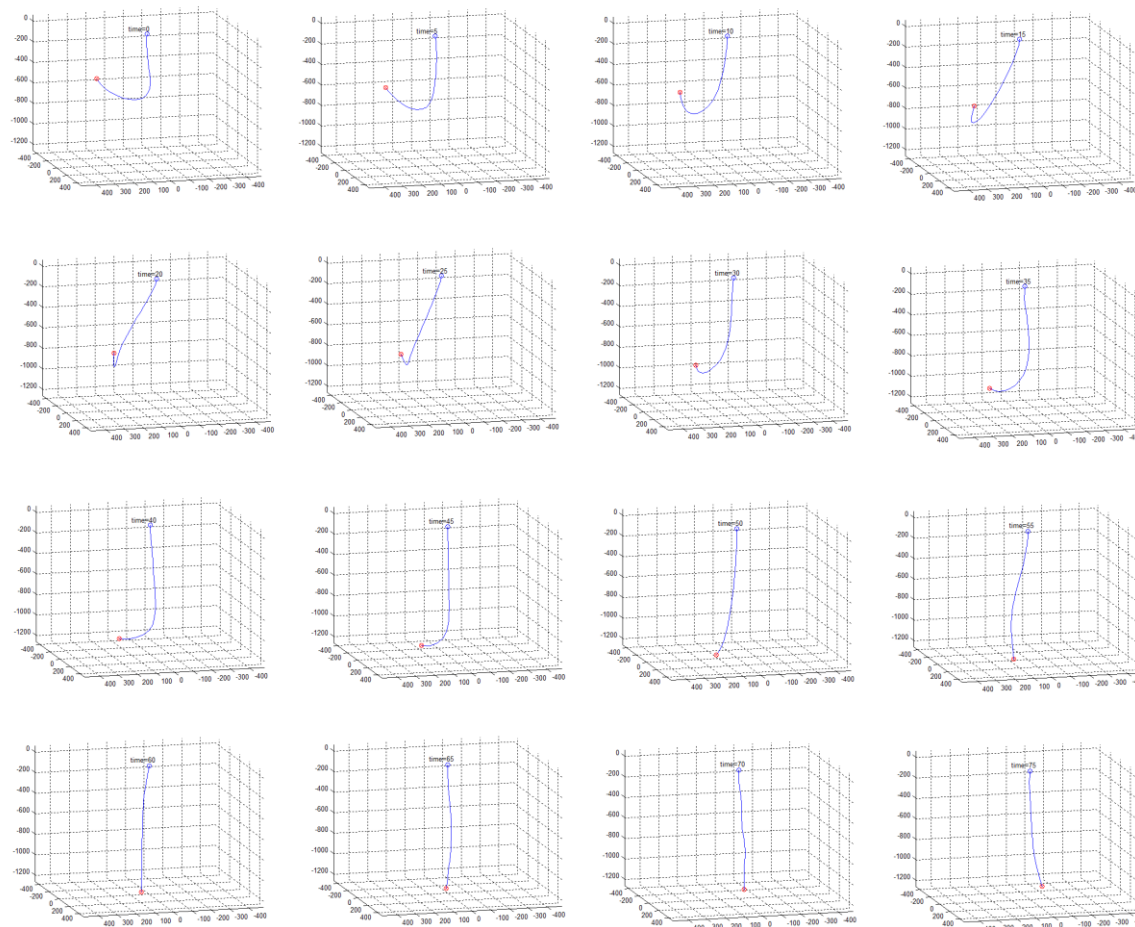


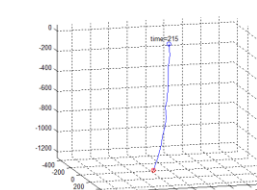
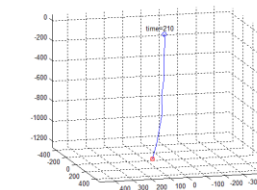
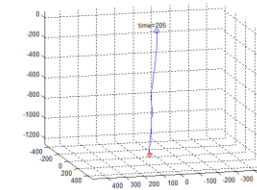
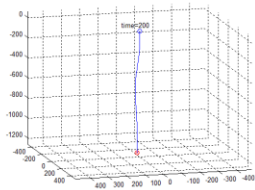
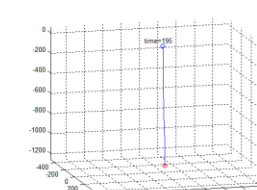
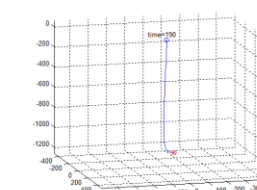
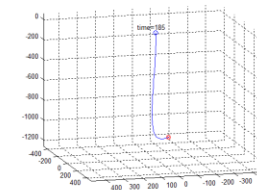
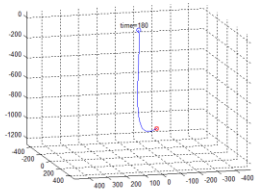
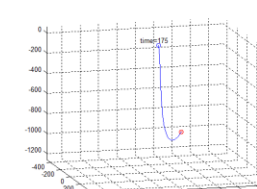
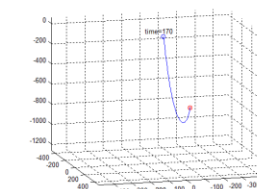
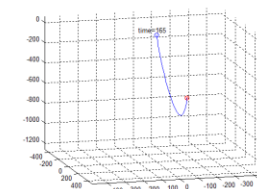
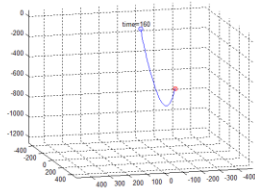
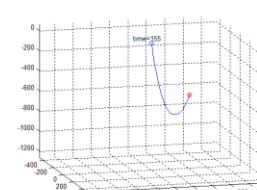
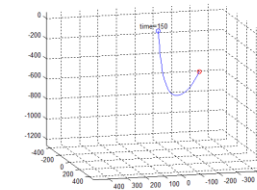
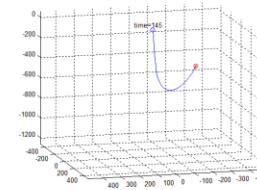
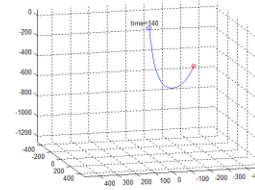
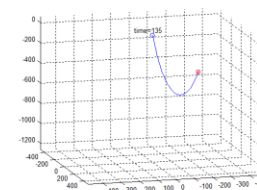
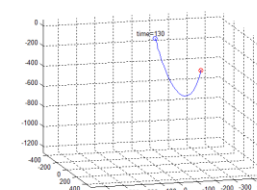
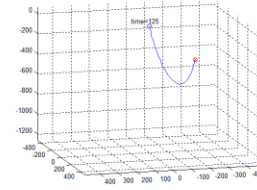
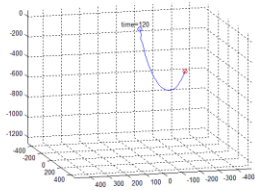
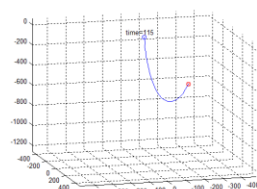
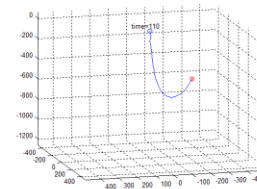
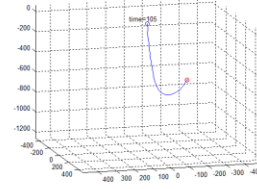
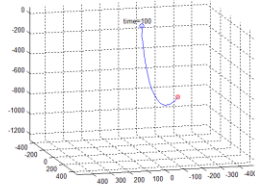
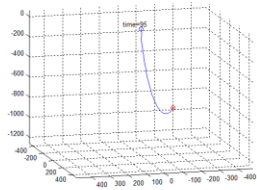
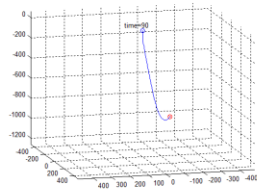
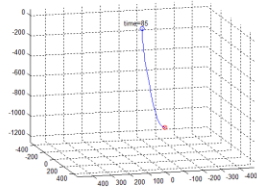
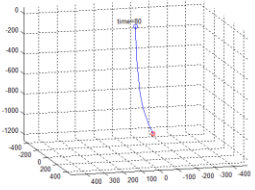
Figura 6.3 - Posição vertical da plataforma móvel; sem forças aplicadas na plataforma móvel.

A segunda simulação também consiste no cabo solto em sua extremidade livre, a partir da mesma configuração espacial inicial da simulação anterior, saindo do repouso para uma situação de queda livre, inserido em um meio subaquático com a ação do arrasto hidrodinâmico e do empuxo na carga terminal, além da aceleração gravitacional. Desta vez, aplica-se uma força externa $u(t)$ na plataforma móvel, de característica senoidal, dependente do tempo, igual a $100000\sin(0,1\pi t)N$, atuando na direção vertical. Esta

força externa é de natureza senoidal para simular uma oscilação harmônica, como por exemplo, o movimento das ondas no oceano. A Figura 6.4 ilustra a movimentação espacial do cabo para esta simulação, considerando-se um tempo final de simulação de 255 s e frames mostrados a cada 5 s. A Figura 6.5 ilustra a trajetória da carga terminal, com símbolo “o” marcando o início do deslocamento e o “x” o final do mesmo. A Figura 6.6 ilustra a posição vertical da plataforma móvel para esta situação.

Os resultados apresentaram-se conforme o esperado fisicamente, para a situação de queda livre a partir de uma configuração espacial inicial. Vibrações forçadas na plataforma móvel induzem a perturbações dinâmicas transmitidas ao longo do cabo, mais perceptíveis a partir de oscilações na carga terminal do cabo presentes na Figura 6.5, quando comparada a Figura 6.2.





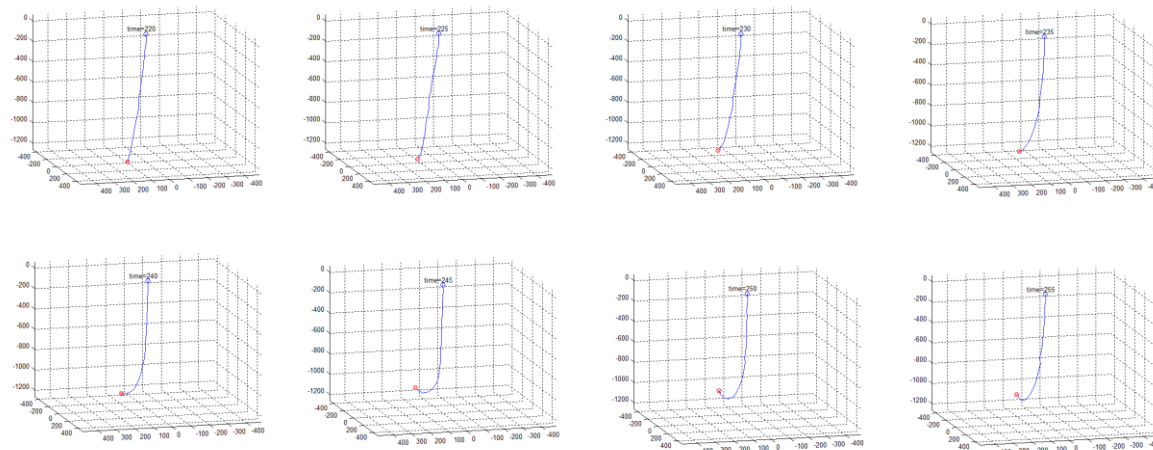


Figura 6.4 - Segunda simulação da primeira situação: 22 elos; com forças na plataforma móvel; queda livre a partir de uma configuração espacial inicial.

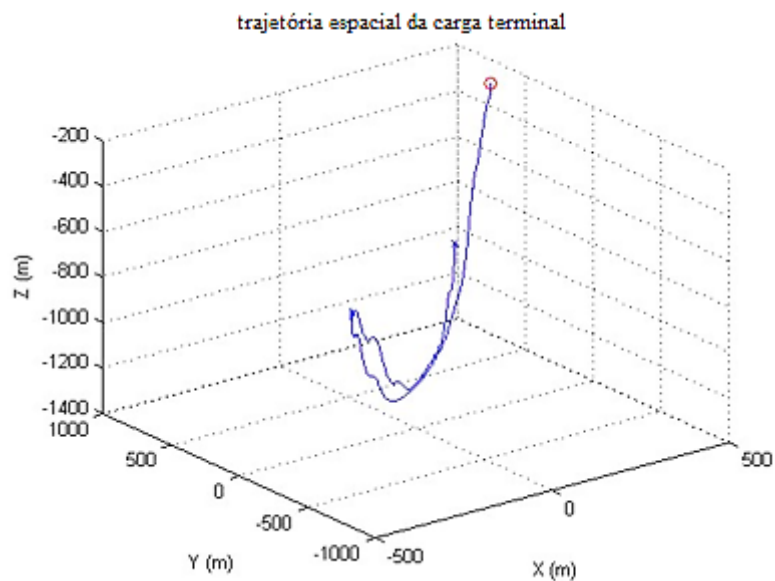


Figura 6.5 - Trajetória da carga terminal; com forças aplicadas na plataforma móvel.

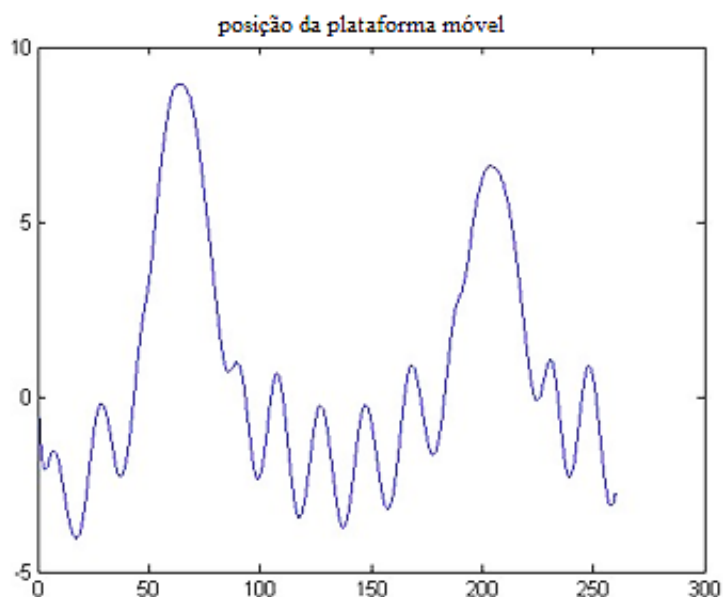


Figura 6.6 - Posição vertical da plataforma móvel; com forças aplicadas na plataforma móvel.

No tópico a seguir, apresentam-se as simulações para a segunda situação considerada neste capítulo.

6.2 SEGUNDA SITUAÇÃO – CABO FIXO AO FUNDO DO OCEANO

Na segunda situação considera-se o cabo fixo ao fundo do mar com forças aplicadas à plataforma móvel. A fixação da extremidade onde se encontra a carga terminal ao fundo do oceano é obtida ampliando-se a massa da carga terminal para caracterizar a fixação à Terra. Além desta ampliação da massa, foram aplicadas forças de vínculo na carga terminal, de forma a mantê-la na mesma posição inicial, forças estas proporcionais ao erro e à derivada do erro, nas três direções ortogonais. Os parâmetros físicos adotados estão expressos a seguir, na Tabela 6.3. A massa M , a constante elástica k_m e o coeficiente de atrito c_m da estrutura flutuante permanecem os mesmos, em relação à primeira situação.

Tabela 6.3 - Parâmetros adotados para as simulações da segunda situação.

Parâmetro	Valor numérico	Significado físico
n	14	Número de elos
m_c	$8 \cdot 10^8$ (kg)	Massa da carga terminal
k_{mc_x}	$30000 \left(\frac{Nm}{rd} \right)$	Constante elástica presente na carga terminal (direção x)
k_{mc_y}	$30000 \left(\frac{Nm}{rd} \right)$	Constante elástica presente na carga terminal (direção y)
k_{mc_z}	$30000 \left(\frac{Nm}{rd} \right)$	Constante elástica presente na carga terminal (direção z)
c_{mc_x}	$15660000 \left(\frac{Nms}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito presente na carga terminal (direção x)
c_{mc_y}	$15660000 \left(\frac{Nms}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito presente na carga terminal (direção y)
c_{mc_z}	$15660000 \left(\frac{Nms}{rd} \right)$	Coefficiente de atrito presente na carga terminal (direção z)

Para esta simulação considera-se uma força externa aplicada à plataforma móvel igual a $100000\sin(0,1\pi t)N$, atuando na direção vertical, de natureza senoidal para simular uma oscilação harmônica, como por exemplo, o movimento das ondas no oceano. A Figura 6.7 ilustra a movimentação do cabo para esta simulação. Considera-se um tempo final de simulação de 117 s e *frames* mostrados a cada 3 s. As Figuras 6.8 e 6.9 ilustram os ângulos de elevação e a posição vertical da plataforma móvel, respectivamente. Observa-se a indução de oscilações no cabo, oriundas dos esforços que lhe são transmitidos pela plataforma móvel. Esta é uma situação de trabalho semelhante aos cabos de ancoragem ou amarração de plataformas móveis e as vibrações no cabo constituem o principal motivo de fadiga mecânica, fator crítico que pode levar à ruptura de tais estruturas mecânicas.

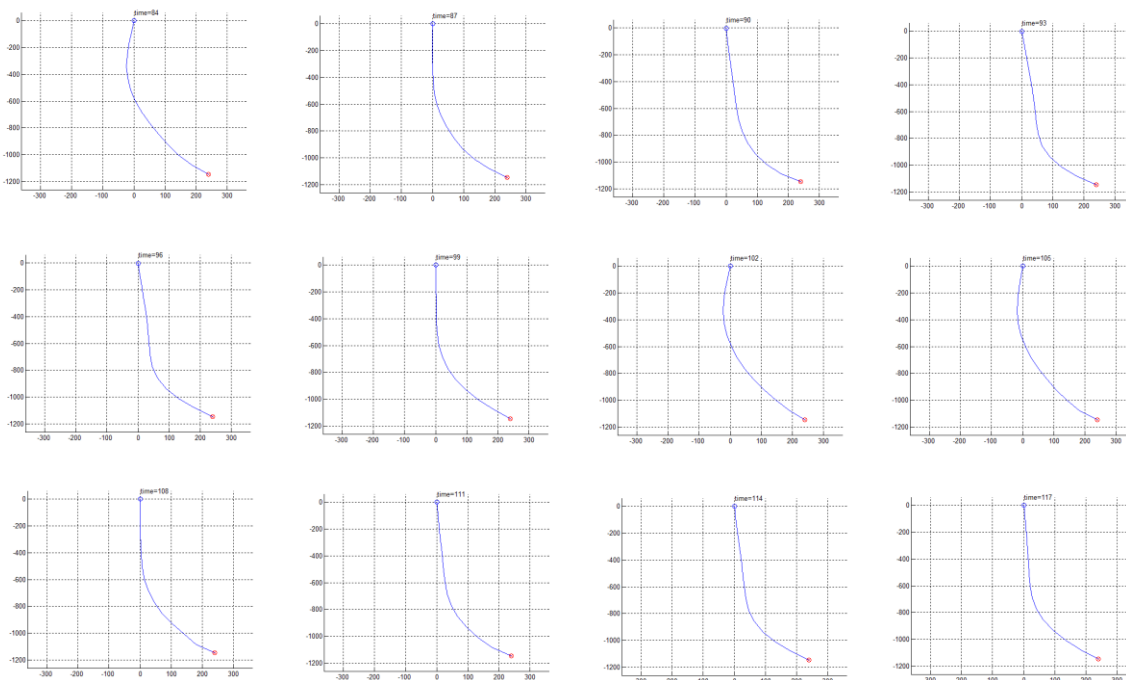


Figura 6.7 - Simulação da segunda situação: 14 elos; com forças na plataforma móvel.

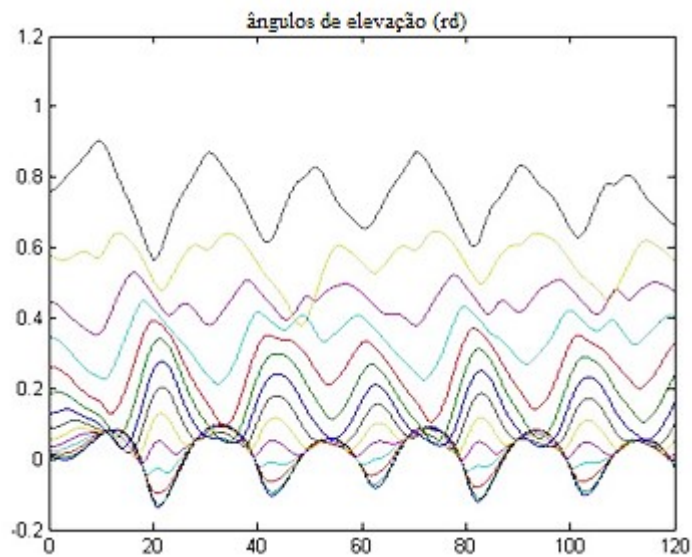


Figura 6.8 - Posições angulares de elevação; com forças aplicadas na plataforma móvel.

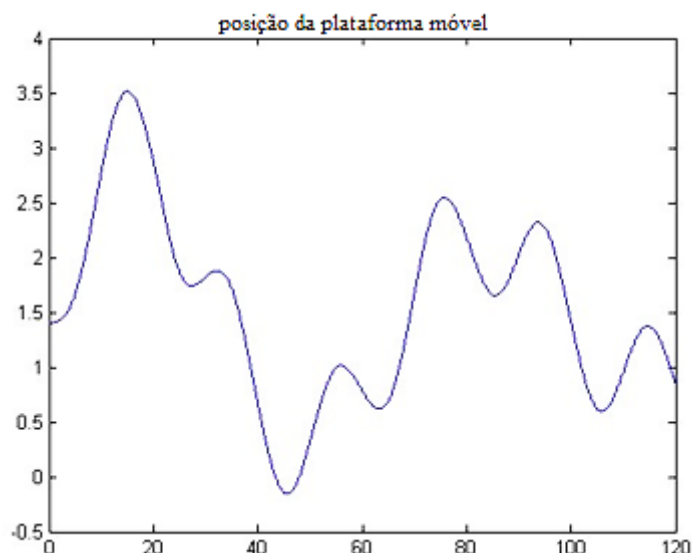


Figura 6.9 - Posição vertical da plataforma móvel; com forças aplicadas na plataforma móvel.

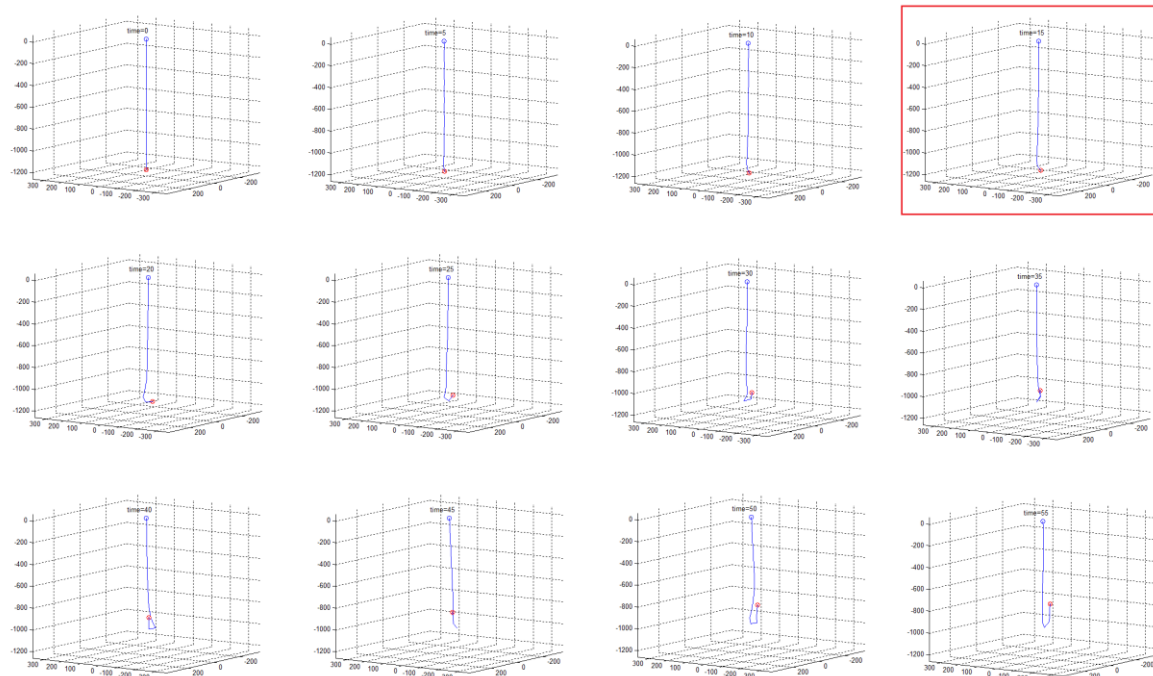
6.3 TERCEIRA SITUAÇÃO – FORÇAS ATUANTES NA CARGA TERMINAL

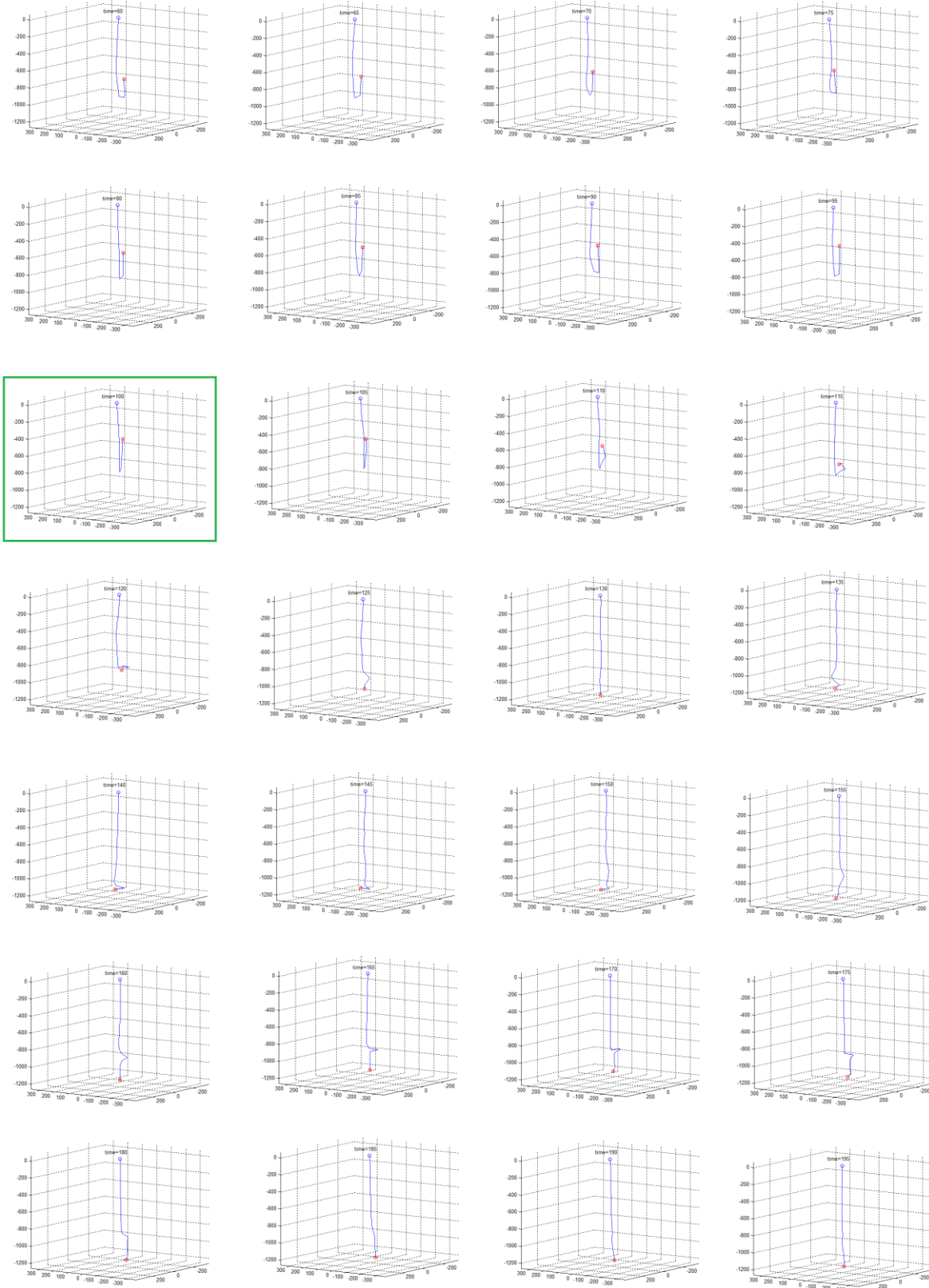
Para a terceira situação consideram-se quatro simulações para verificar o comportamento do cabo a partir da aplicação de forças em sua carga terminal, situada na extremidade livre, desconsiderando-se os vínculos na mesma.

Serão realizadas simulações para os casos onde as forças e torques atuantes na carga terminal estão localizadas no referencial inercial. Considera-se primeiramente o caso onde não atuam forças na plataforma móvel, seguida da simulação onde são consideradas forças aplicadas à plataforma móvel. Por conseguinte, simula-se os casos onde as forças e torques atuantes na carga terminal localizam-se no referencial do corpo. Considera-se primeiramente o caso onde não atuam forças na plataforma móvel, seguida da simulação onde são consideradas forças aplicadas na plataforma móvel.

6.3.1 FORÇAS ATUANTES NO REFERENCIAL INERCIAL

A primeira simulação foi realizada com o cabo aproximado por 22 elos e, para esta simulação, as forças aplicadas na plataforma móvel são inexistentes. Aplicou-se uma força \vec{F}_{c0x} de intensidade $5N$ na direção X e uma força \vec{F}_{c0y} de intensidade $700N$ na direção Y , atuantes na carga terminal, por $15s$ de simulação. A partir de $15s$ as forças \vec{F}_{c0x} e \vec{F}_{c0y} foram anulada e aplicou-se forças \vec{F}_{c0z} de intensidade $-16800N$ na direção Z (sinalizado em vermelho na figura 6.10, o *frame* correspondente ao instante em que são aplicadas estas forças) até $100s$. Após $100s$ todas as forças foram anuladas, ou seja, a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 6.10, o *frame* correspondente ao instante em que as forças foram anuladas). O tempo total de simulação foi de $235s$ com *frames* mostrados a cada $5s$ segundos. A Figura 6.11 ilustra a trajetória da carga terminal: o símbolo “o” marca o início do deslocamento e “x” o final do mesmo. A Figura 6.12 ilustra a posição vertical da plataforma móvel para esta situação.





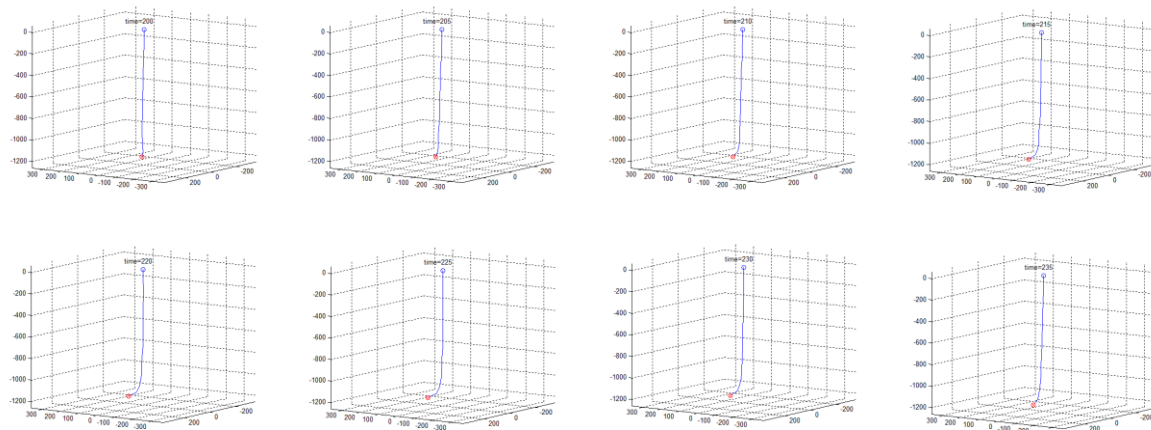


Figura 6.10 - Forças no referencial inercial: 22 elos; sem força na plataforma móvel.

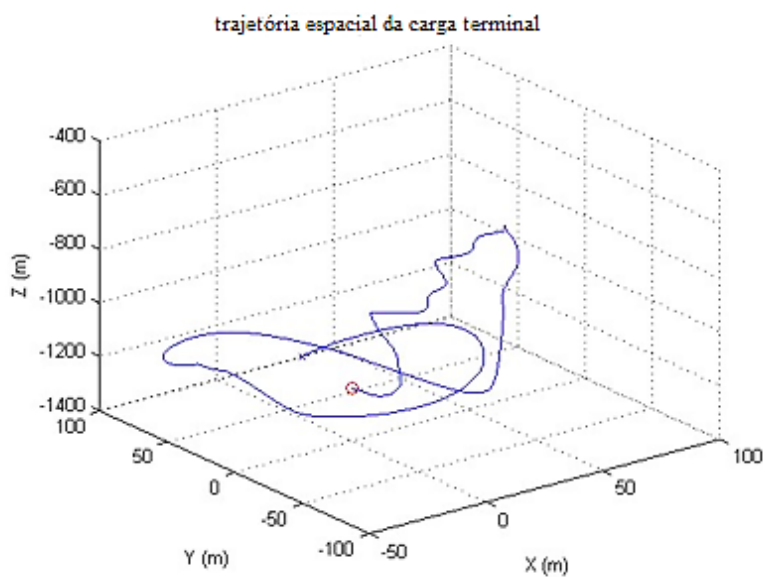


Figura 6.11 - Trajetória da carga terminal; sem forças aplicadas na plataforma móvel.

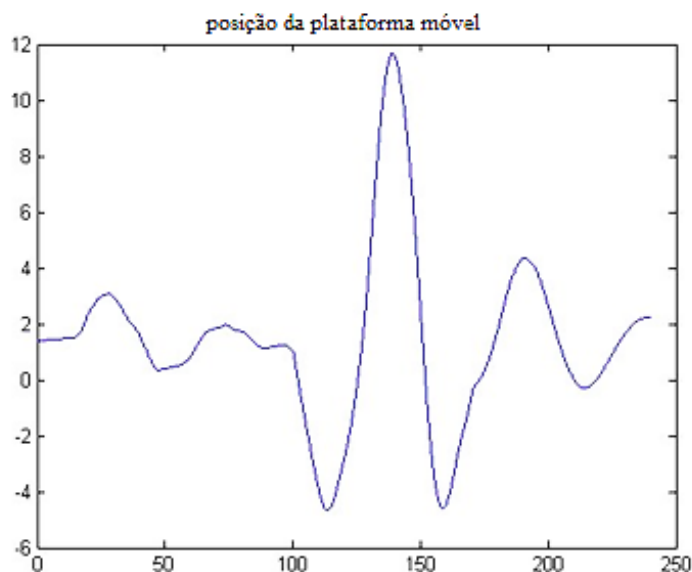
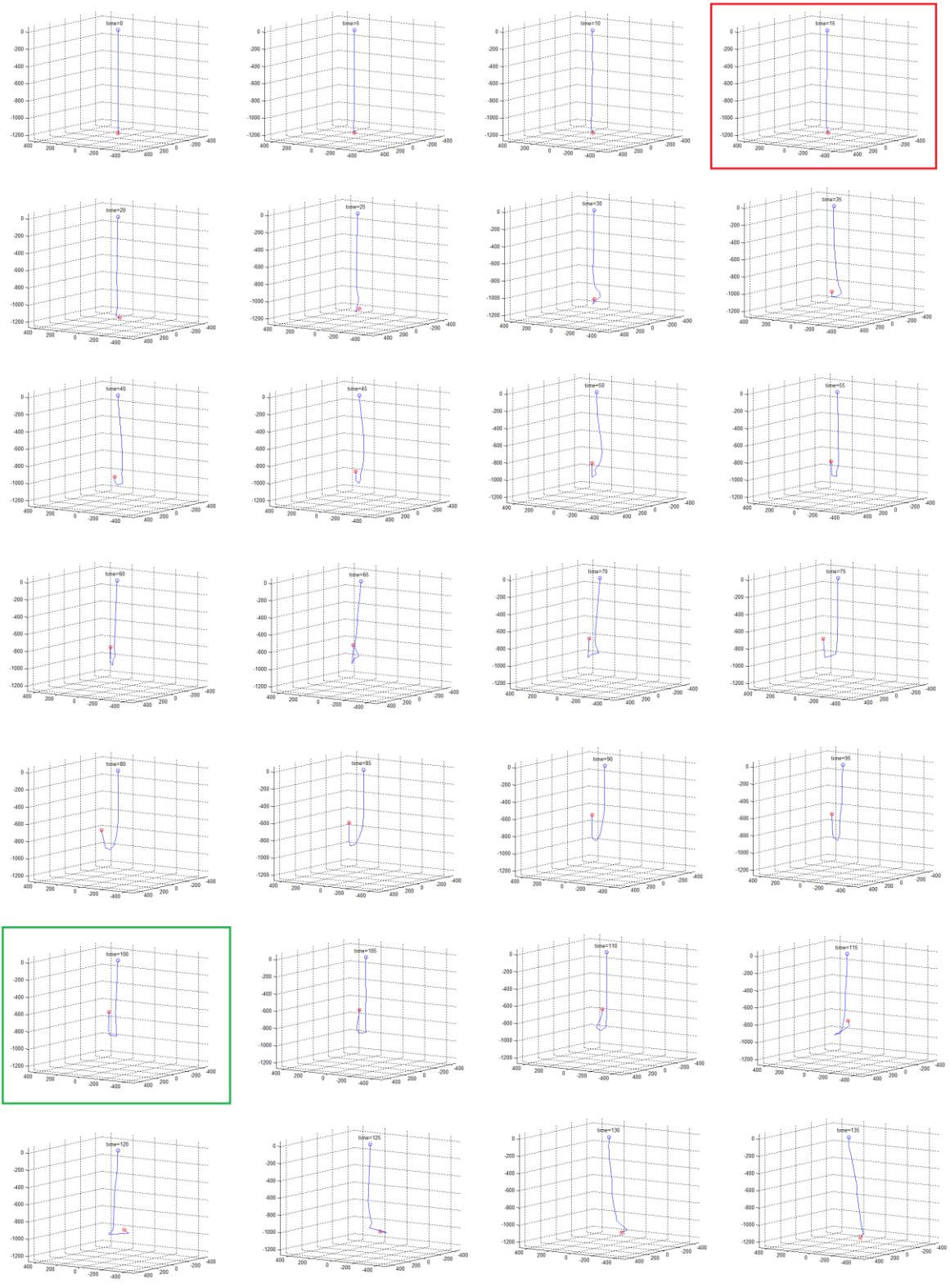


Figura 6.12 - Posição vertical da plataforma móvel; sem forças aplicadas na plataforma móvel.

A segunda simulação também foi realizada com o cabo dividido em 22 elos, porém aplica-se uma força externa à plataforma móvel igual a $100000\sin(0,1\pi t)N$, atuando na direção vertical, de natureza senoidal, para simular uma oscilação harmônica, como por exemplo, o movimento das ondas no oceano. Inicialmente aplica-se uma força \vec{F}_{c0x} de intensidade $5N$ na direção X e uma força \vec{F}_{c0y} de intensidade $700N$ na direção Y , atuante na carga terminal por $15s$ de simulação. A partir de $15s$ as forças \vec{F}_{c0x} e \vec{F}_{c0y} foram anuladas e aplicou-se forças \vec{F}_{c0z} de intensidade $16800N$ na direção Z (sinalizado em vermelho na Figura 6.13, o *frame* correspondente ao instante em que são aplicadas estas forças) até $100s$ e após $100s$ todas as forças foram anuladas, ou seja, a carga terminal ficou em situação de queda livre (sinalizado em verde na Figura 6.13, o *frame* correspondente ao instante em que as forças foram anuladas). O tempo total de simulação foi de $235s$ com *frames* mostrados a cada 5 segundos. A Figura 6.14 ilustra a trajetória da carga terminal, o símbolo “o” marca o início do deslocamento e “x” o final do mesmo e a Figura 6.15 ilustra a plataforma móvel para esta situação.



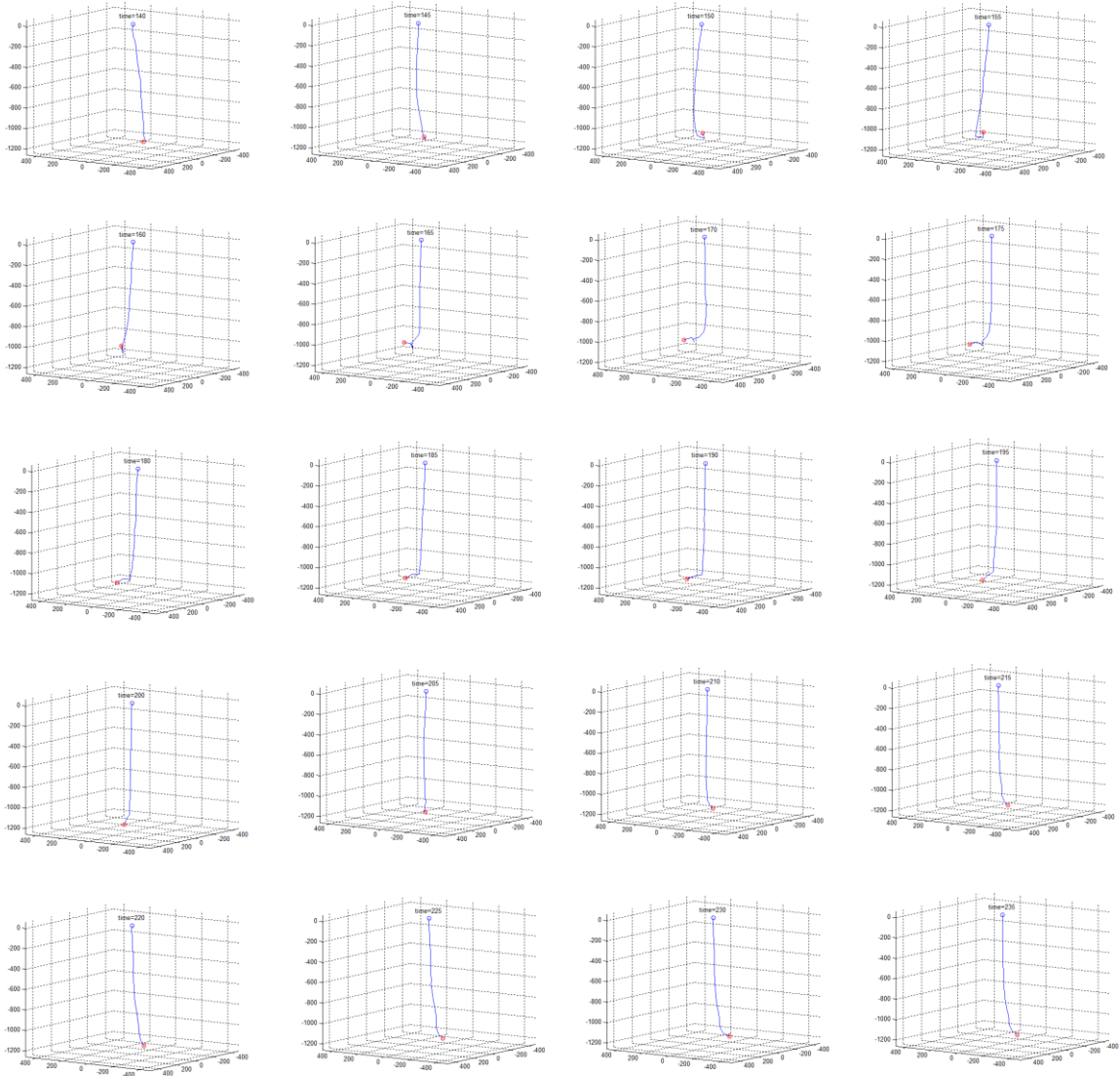


Figura 6.13 - Forças no referencial inercial: 22 elos; com força na plataforma móvel.

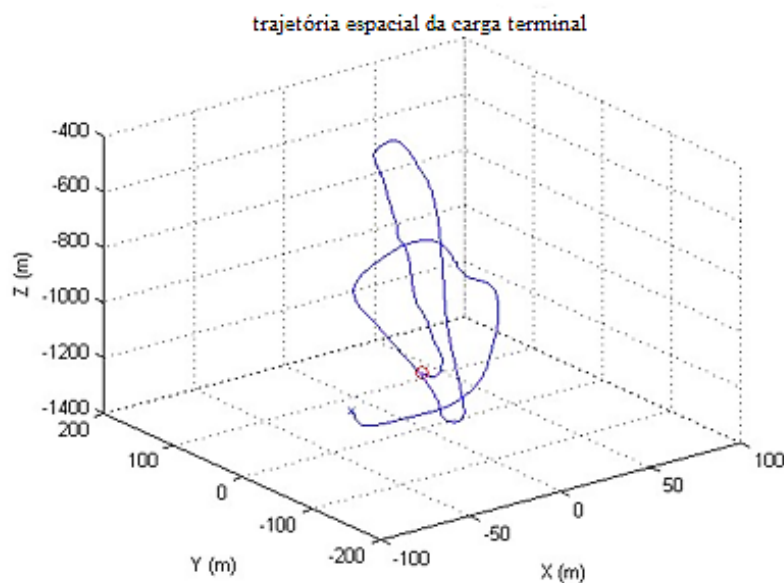


Figura 6.14 - Trajetória da carga terminal; com forças aplicadas na plataforma móvel.

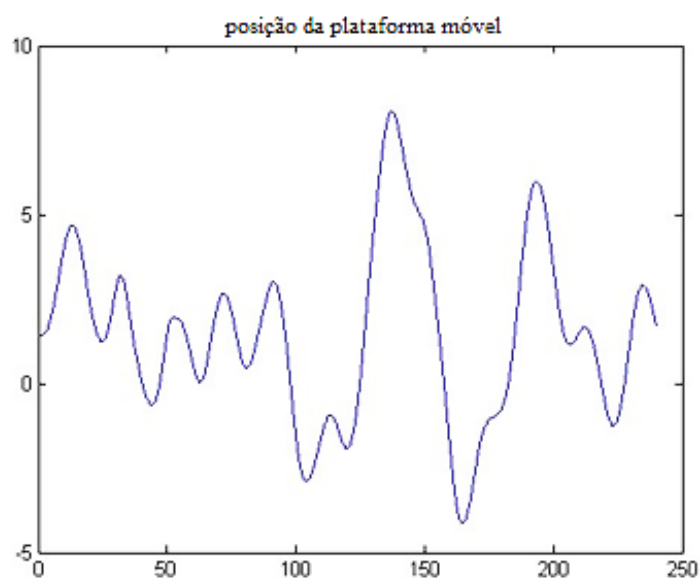
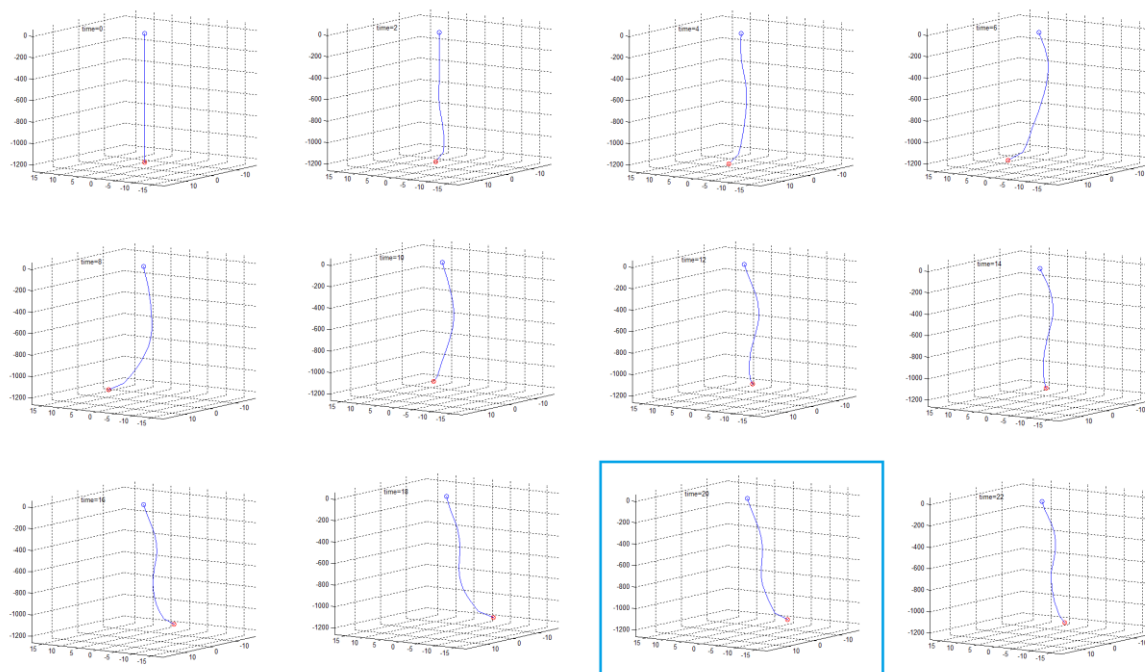


Figura 6.15 - Posição vertical da plataforma móvel; com forças aplicadas na plataforma móvel.

Observa-se que a força Z após 5 s é negativa, induzindo a carga terminal a subir em direção à superfície. Após 100 s, as forças são anuladas e o cabo cai em queda livre, em busca da sua posição de equilíbrio estático final, com todas as suas coordenadas de posição e velocidade nulas (atrator da dinâmica de $n + 1$ graus de liberdade). Nessas simulações, a posição inicial da plataforma foi a de equilíbrio com relação ao peso do cabo.

6.3.2 FORÇAS ATUANTES NO REFERENCIAL DO CORPO

A primeira simulação mostrada a seguir foi realizada sem a utilização de força na plataforma móvel. Toda a estrutura está inicialmente em repouso, com o cabo perfeitamente na vertical. Durante os primeiros 20 s aplicou-se uma força constante na direção Y do referencial do corpo, mas com intensidades diferentes nos dois atuadores desta direção: 1400 N em um dos atuadores e 1372 N no outro (sinalizado em azul nas Figuras 6.16 e 6.17, o *frame* correspondente ao instante em que forças foram anuladas). Estas forças provocam um torque sobre o eixo Z do referencial do corpo, além de impulsionarem a carga terminal na direção Y (referencial do corpo). O tempo total de simulação foi de 46 s com *frames* a cada 2 s. Portanto, a carga terminal, além de se elevar, descreve uma trajetória curva no espaço. As Figuras 6.18 e 6.19 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal em cada um dos eixos X , Y e Z (sistema inercial da base) e a posição da plataforma móvel. A Figura 6.20, ilustra as posições angulares dos ângulos de torção.



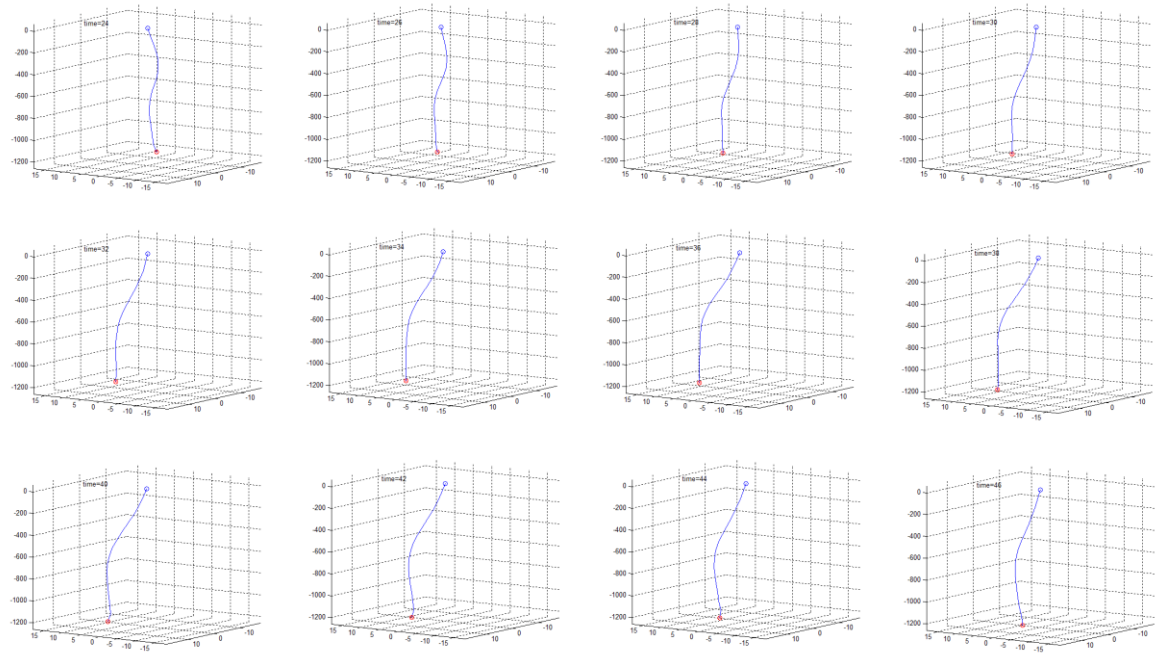
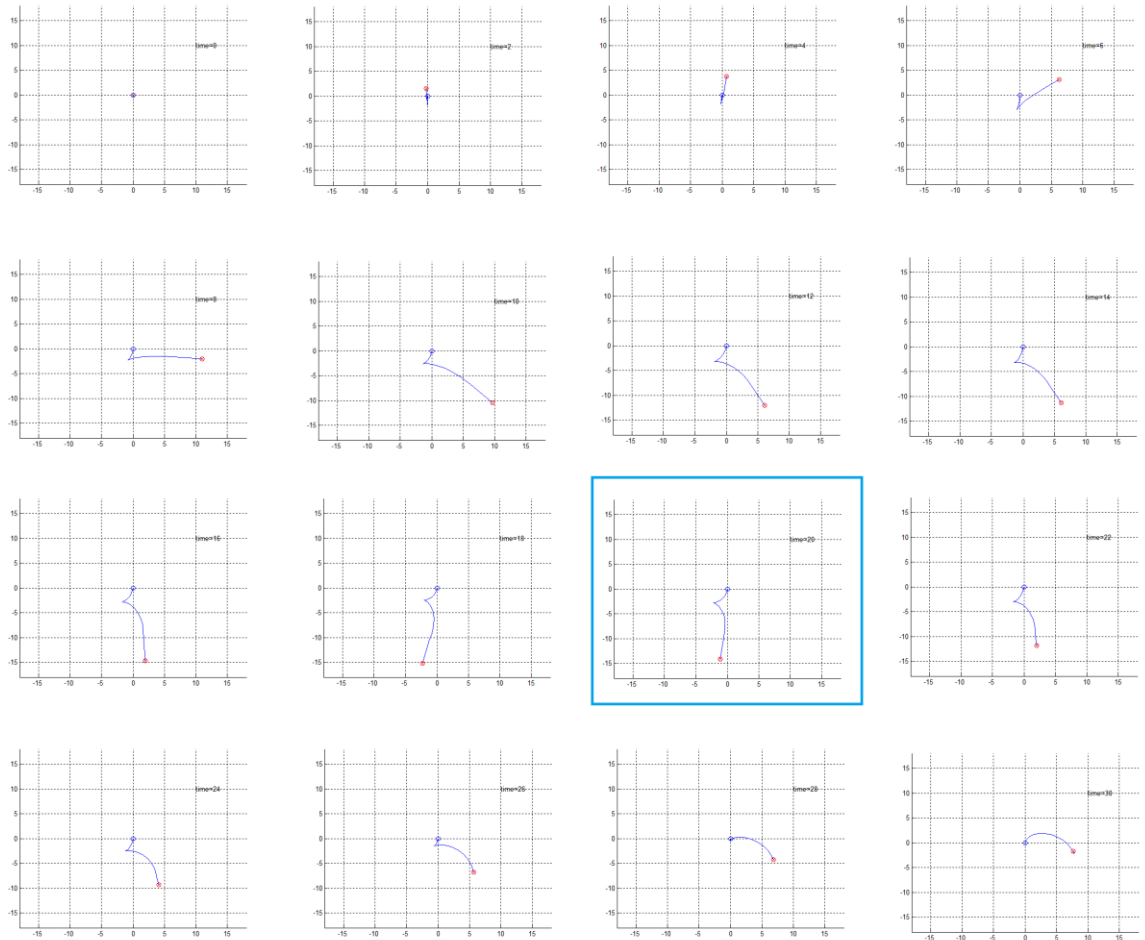


Figura 6.16 - Forças no referencial do corpo: 16 elos; sem força na plataforma móvel; espaço tridimensional.



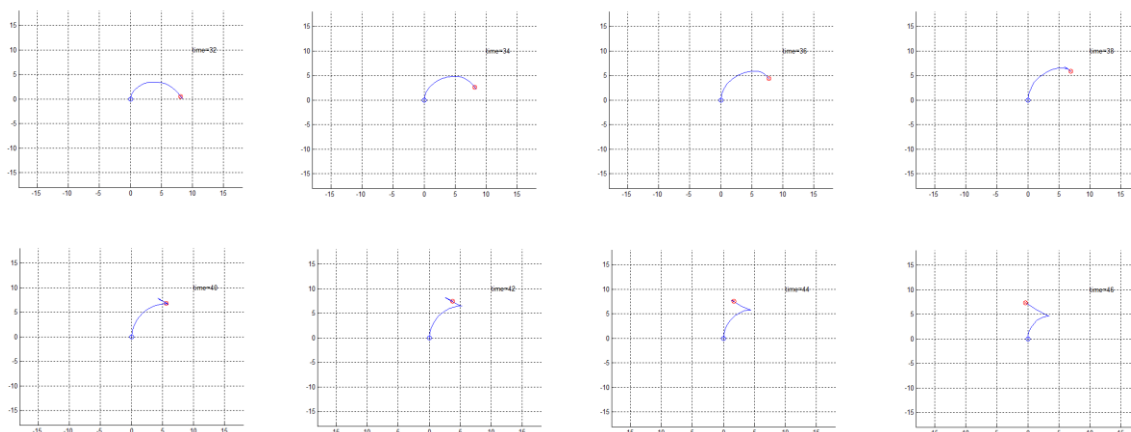


Figura 6.17 - Forças no referencial do corpo: 16 elos; sem força na plataforma móvel; espaço bidimensional.

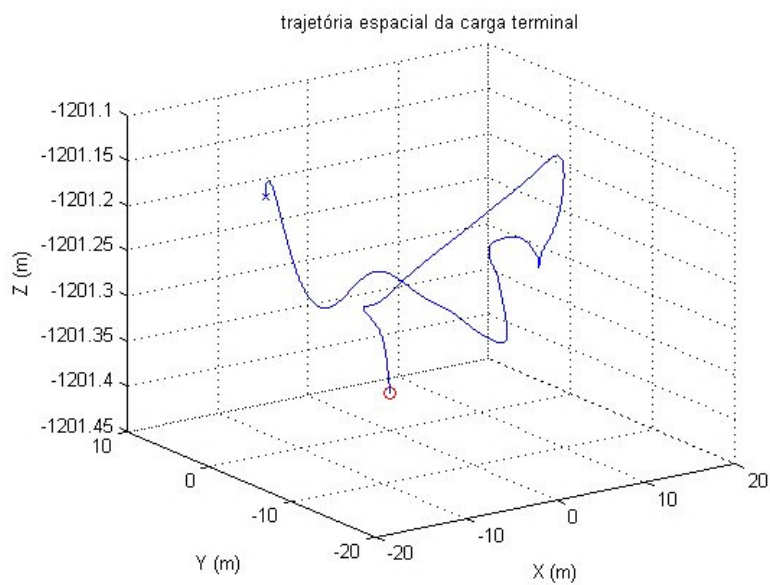


Figura 6.18 - Trajetória da carga terminal; sem forças aplicadas na plataforma móvel.

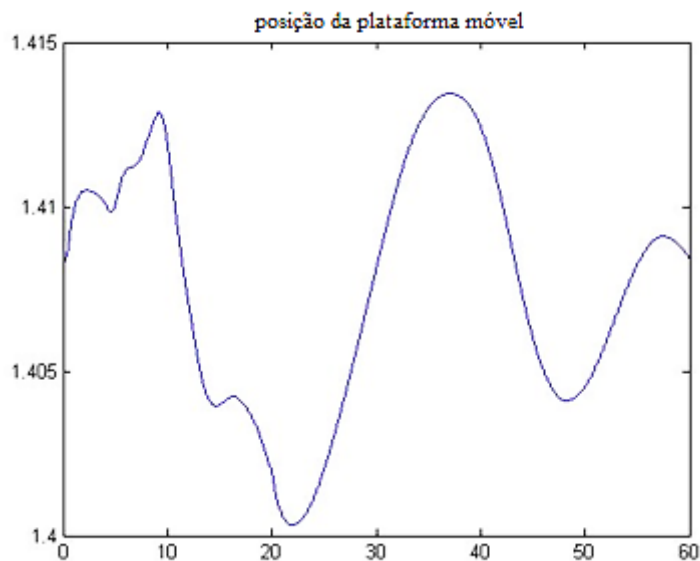


Figura 6.19 - Posição vertical da plataforma móvel; sem forças aplicadas na plataforma móvel.

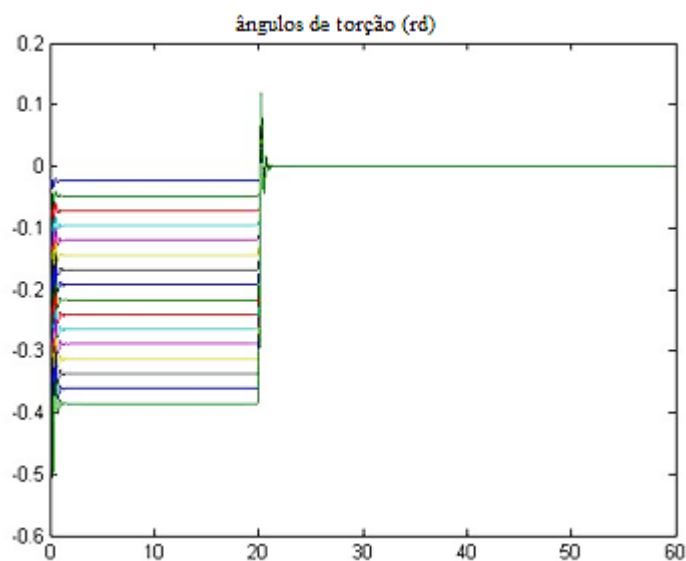
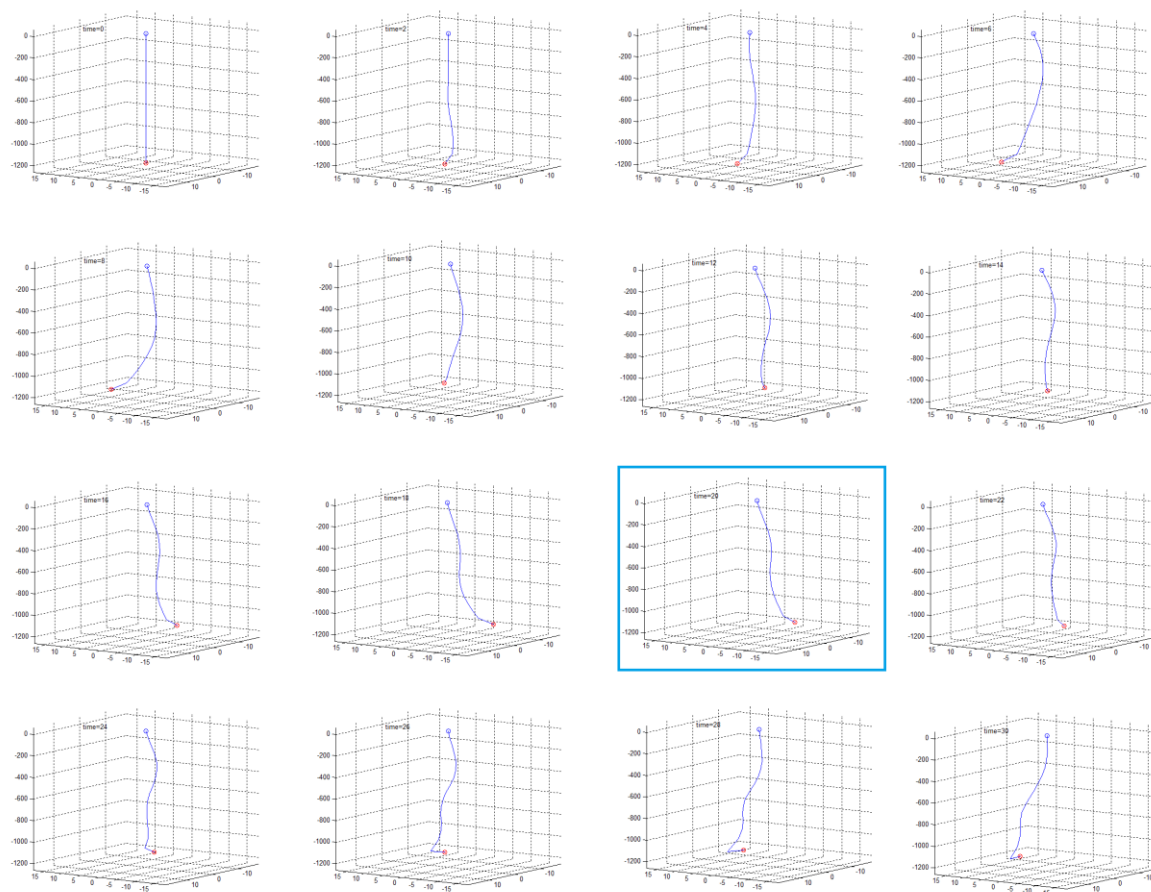


Figura 6.20 - Posições angulares de torção; sem forças aplicadas na plataforma móvel.

Para a segunda simulação mostrada a seguir, aplica-se uma força externa $u(t)$, de característica senoidal, dependente do tempo e de intensidade igual a $100000\sin(0,1\pi t)N$, na plataforma móvel, atuando na direção vertical. Esta força externa é de natureza senoidal para simular uma oscilação harmônica, como por exemplo, o movimento das ondas no oceano. Toda a estrutura está inicialmente em repouso, com o

cabo perfeitamente na vertical. Durante os primeiros 20 s aplicou-se uma força constante na direção Y do referencial do corpo, mas com intensidades diferentes nos dois atuadores dessa direção: 1400 N em um dos atuadores e 1372 N no outro (sinalizado em azul nas Figuras 6.21 e 6.22, o *frame* correspondente ao instante em que forças foram anuladas). Estas forças provocam um torque sobre o eixo Z do referencial do corpo, além de impulsionarem a carga terminal na direção Y (referencial do corpo). O tempo total de simulação foi de 46 s. Portanto, a carga terminal, além de se elevar, descreve uma trajetória curva no espaço. As Figuras 6.23 e 6.24 mostram, respectivamente, a trajetória da carga terminal (o símbolo “o” marca o início do deslocamento e “x” o final do mesmo) em cada um dos eixos X, Y e Z (sistema inercial da base) e a posição da plataforma móvel. A Figura 6.25, ilustra as posições angulares dos ângulos de torção.



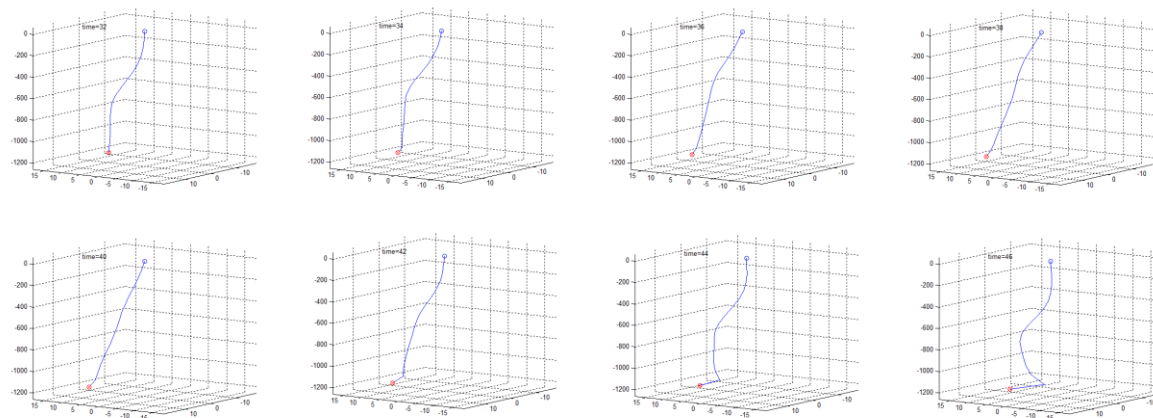
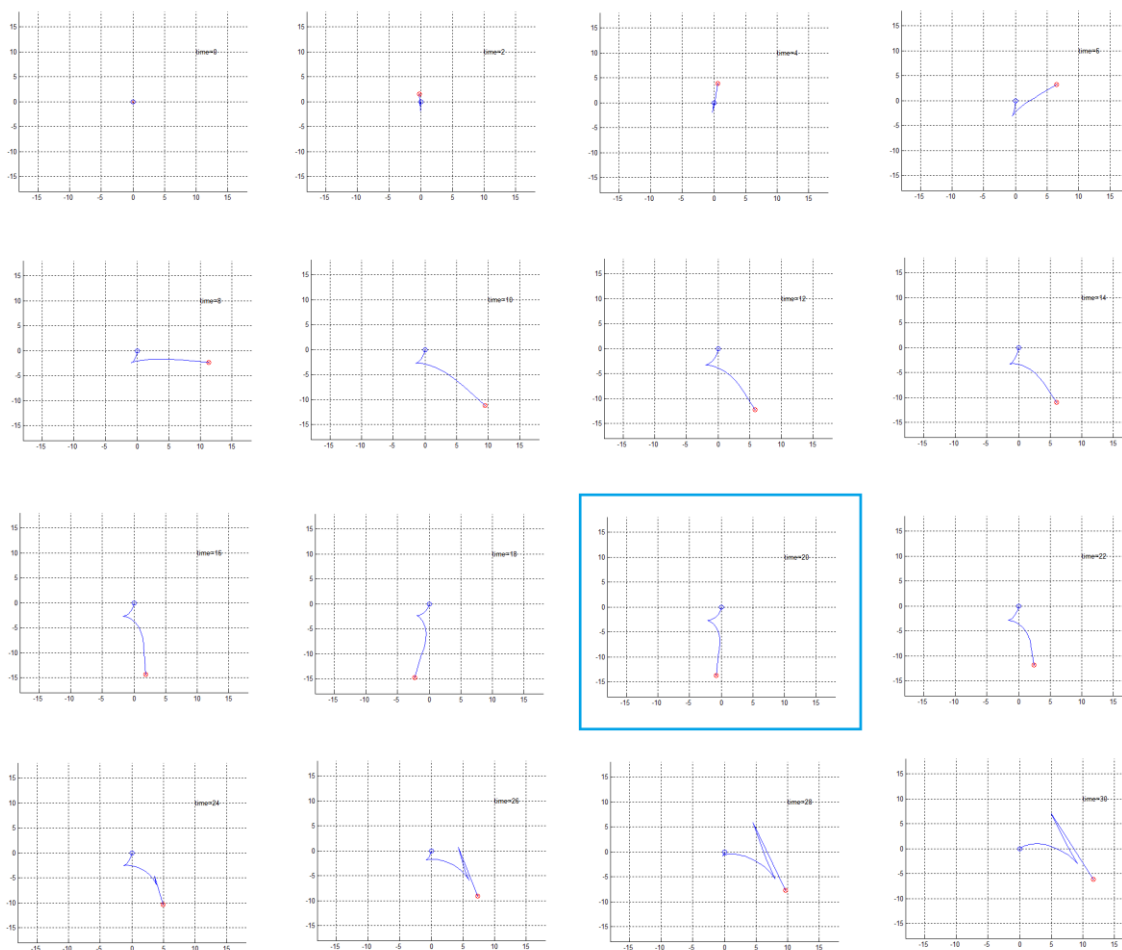


Figura 6.21 - Forças no referencial do corpo: 16 elos; com força na plataforma móvel; espaço tridimensional.



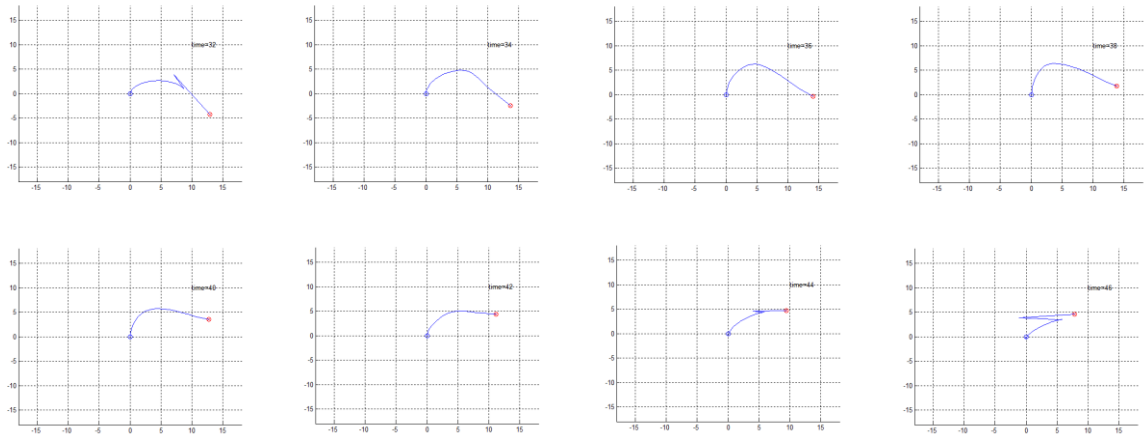


Figura 6.22 - Forças no referencial do corpo: 16 elos; com força na plataforma móvel; espaço bidimensional.

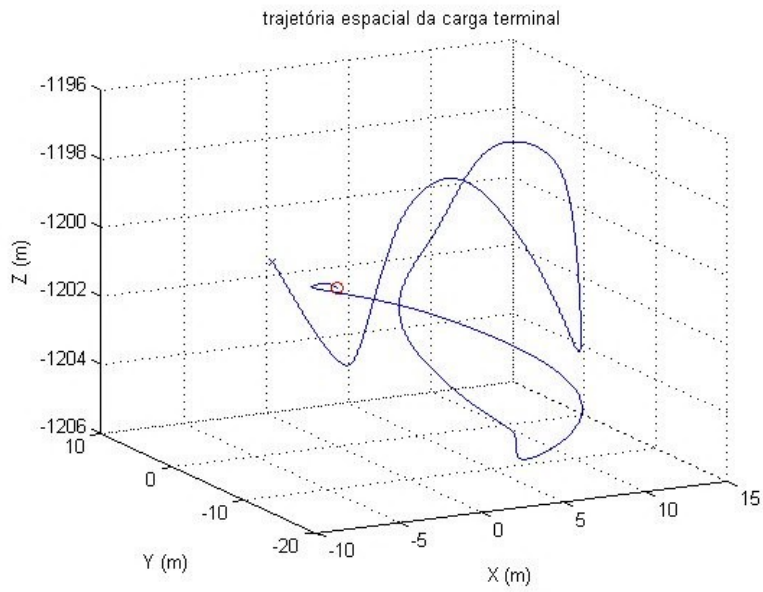


Figura 6.23 - Trajetória da carga terminal; com forças aplicadas na plataforma móvel.

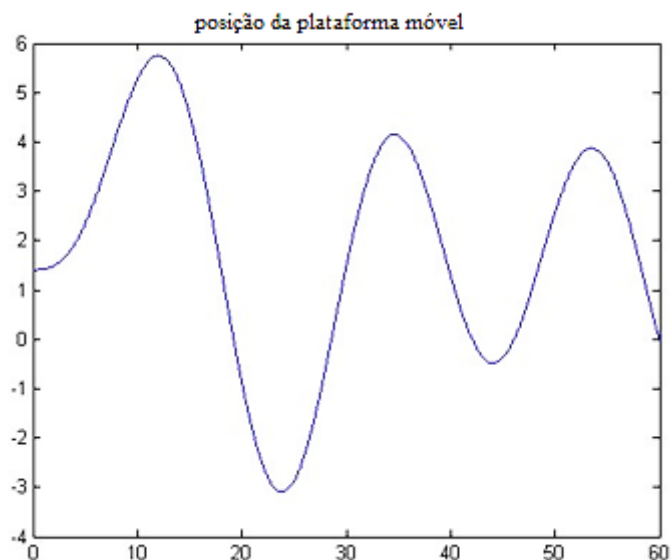


Figura 6.24 - Posição vertical da plataforma móvel; com forças aplicadas na plataforma móvel.

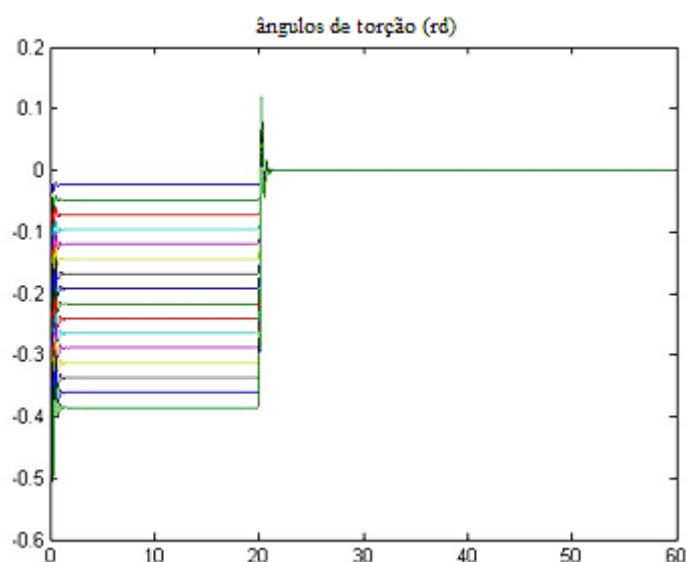


Figura 6.25 - Posições angulares de torção; com forças aplicadas na plataforma móvel.

Percebem-se oscilações bem maiores na posição da plataforma móvel (figura 6.24) quando se aplica a força externa senoidal. A movimentação da plataforma gera uma perturbação no movimento do cabo, perceptível na trajetória espacial da carga terminal (figura 6.23). Este tipo de simulação se assemelha ao caso de um ROV conectado com a plataforma móvel via cabo umbilical. Como o cabo tem 1200 m de comprimento, em aço e com diâmetro de 0,01 m, a sua dinâmica é preponderante, ou seja, muito significativa e influencia completamente a dinâmica da carga terminal (ROV).

6.4 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS SIMULAÇÕES

Neste tópico serão realizadas algumas considerações a respeito das simulações realizadas com os algoritmos genéricos desenvolvido, bem como sobre o tempo computacional gasto para realizar as simulações numéricas.

Para a solução numérica das equações diferenciais do modelo dinâmico é necessário obter a inversa da matriz de inércia. Porém, à medida que se aumenta o número de elos para um mesmo comprimento do cabo, observa-se que o determinante desta matriz aproxima-se de zero, acarretando problemas para a integração numérica. As simulações computacionais apresentadas neste capítulo consideraram um cabo com comprimento total de 1200 *m*, dividido em até 28 elos e com uma carga terminal de 60 *kg*. Em todos os casos, os resultados se mostraram conforme o esperado fisicamente. O conhecimento das condições iniciais e das forças aplicadas à carga terminal induzem, a priori, ao conhecimento prévio sobre como será a movimentação do cabo no espaço 3D. Realizadas as simulações, a movimentação espacial do cabo coincide, em todos os casos, ao que se esperava previamente. As figuras mostradas em forma de *frames* apresentaram uma impressão de continuidade na flexibilidade estrutural do cabo e esta impressão é ampliada à medida que se amplia a quantidade de elos considerados.

As simulações foram realizadas utilizando-se o *software* MATLAB®, em um microcomputador modelo Aspire E 15 E5-571-51AF, com processador Intel Core i5 e memória RAM de 4 GB DDR3 2,2 GHz.

6.5 ANÁLISE ESTÁTICA

6.5.1 CONTROLE PD

Inicialmente havia a necessidade de manter a carga terminal do cabo fixa a uma determinada profundidade. A plataforma foi considerada imóvel em razão da ampliação da sua constante elástica, que foi multiplicada por $1e-3$. A Figura 6.26 mostra essa situação, ou seja, o cabo em equilíbrio estático no plano XZ .

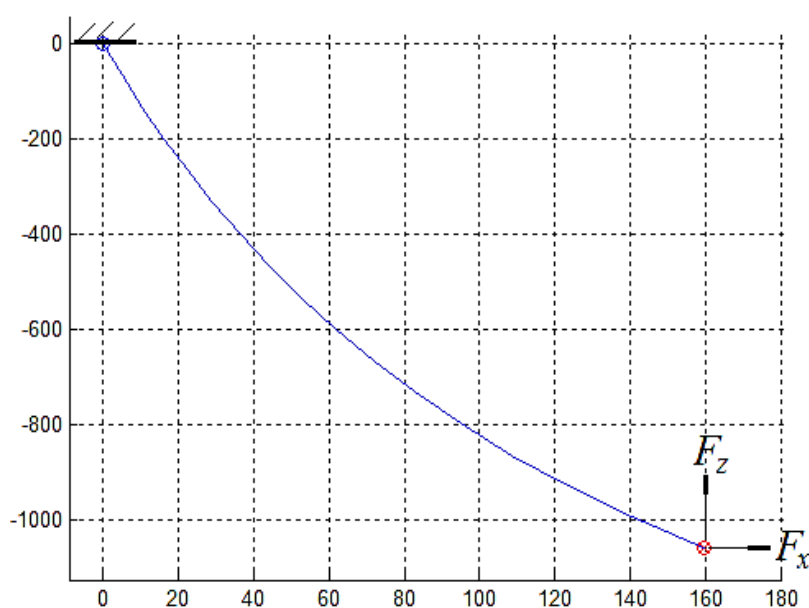


Figura 6. 26 - Configuração estática final do cabo (escalas em m).

As coordenadas de posição da carga terminal são obtidas a partir das seguintes expressões:

$$x_c = 0; \quad z_c = 0;$$

para $i = 1$ até n ,

$$x_c = x_c + l_i \text{sen}(\theta_{ei}) ; \tag{6.1}$$

$$z_c = z_c + l_i \text{cos}(\theta_{ei}) ;$$

fim para,

onde l_i são os comprimentos dos elos e θ_{ei} os ângulos de elevação, conforme já definidos anteriormente.

Vale lembrar que a escala em Z da Figura 6.26 está negativa para que, no MATLAB®, o gráfico seja coerente com a convenção adotada, cujo eixo Z aponta para o centro da Terra. À configuração espacial foi imposta a condição que a carga terminal tivesse as seguintes coordenadas $X_{cr} = 160$; $Z_{cr} = 1061.4$. Esses valores passaram a ser degraus de referência para um controle Proporcional e Derivativo (PD), aplicado a fim de manter as posições em X e em Z da carga terminal idênticas a estas referências. As

forças F_x e F_z (ver Figura 6.26) passam a ser forças de controle aplicadas na carga terminal e suas expressões possuem as formas:

$$\begin{aligned} F_x &= K_p[X_{cr} - X_c] + K_d[0 - \dot{X}_c] \\ F_z &= K_p[Z_{cr} - Z_c] + K_d[0 - \dot{Z}_c] \end{aligned} \quad (6.2)$$

Os ganhos K_p e K_d foram escolhidos por tentativa e erro, efetuando-se diversas simulações e verificando-se o desempenho na manutenção da carga terminal nas posições de referência em X e em Z .

A Figura 6.27 mostra os ângulos de elevação da simulação com o controle PD aplicado para manter a posição da carga terminal fixa nos pontos X_{cr} e Z_{cr} . A simulação completa foi até 360 s, mas na Figura 6.27 mostram-se apenas os primeiros 120 s. Percebe-se que próximo a 120 s não mais é perceptível movimentação no cabo. Após 360 s, a configuração estática final é idêntica à mostrada na Figura 6.26.

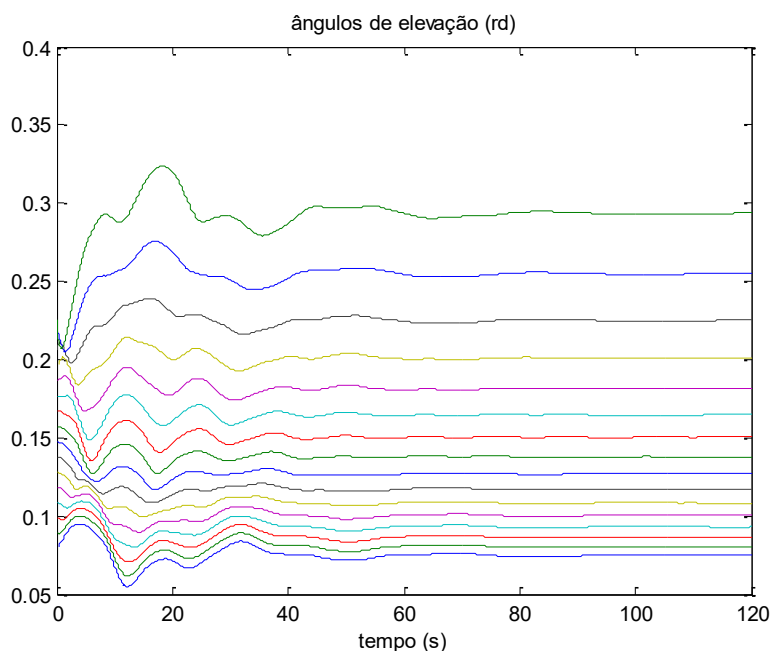


Figura 6. 27 - Simulação para se chegar ao equilíbrio estático do cabo.

6.5.2 A CURVA CATENÁRIA

O objetivo desta seção é comparar a solução numérica obtida com o modelo dinâmico com uma solução analítica, considerando-se o cabo em equilíbrio estático final. Considerou-se o cabo fixo no fundo do oceano, nas posições X_{cr} e Z_{cr} . Conforme visto na subseção anterior, a constante elástica da plataforma foi ampliada mil vezes, de forma a inibir o seu movimento vertical. O cabo foi posto em uma configuração espacial inicial e foi realizada a simulação até o tempo final igual a 360 s. Após esse tempo final, todas as velocidades angulares já estavam menores que $1e-6$, de forma que o cabo encontrava-se aproximadamente em equilíbrio estático.

Uma vez obtida a configuração estática final via simulação, o objetivo passou a ser a busca de uma solução analítica para a configuração estática final, a partir da curva catenária, conhecida desde o século XVII.

Proposto por Leonardo da Vinci, o problema de encontrar a curva espacial de um cabo suspenso em dois pontos foi interpretado de forma errada por Galileu (1564-1642), supondo ter encontrado uma outra aplicação da parábola na curva de suspensão de uma corda ou cadeia flexível.

Apenas em 1690, James Bernoulli chamou atenção sobre esse problema, sendo resolvido um ano depois por Leibniz, Huyghens e Johann Bernoulli, irmão de James. Leibniz foi quem deu o nome catenária à curva ocupada pelo cabo (do latim *catena* que quer dizer corrente) (EVES [7]). A Figura 6.28 mostra um cabo com a característica de possuir pesos iguais para comprimentos iguais.

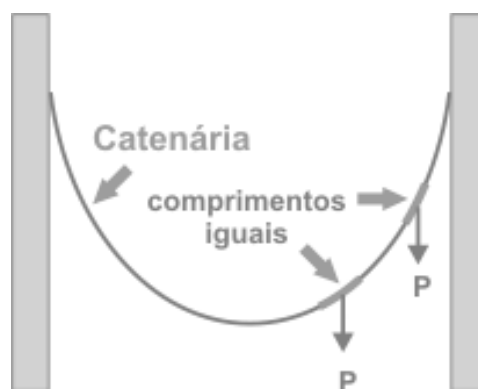


Figura 6.28 - Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsf/for0203.htm

A catenária à primeira vista aparenta a forma geral da parábola, mas na realidade trata-se da função cosseno hiperbólico (FREITAS[8]).

Considera-se um sistema de coordenadas com origem no ponto mais baixo da curva, sendo a curva situada no plano xy e o eixo y perpendicular à curva considerada. Quando atingido o equilíbrio, o cabo ficará contido em um plano, o plano vertical que passa por suas extremidades, como mostra a Figura 6.29.

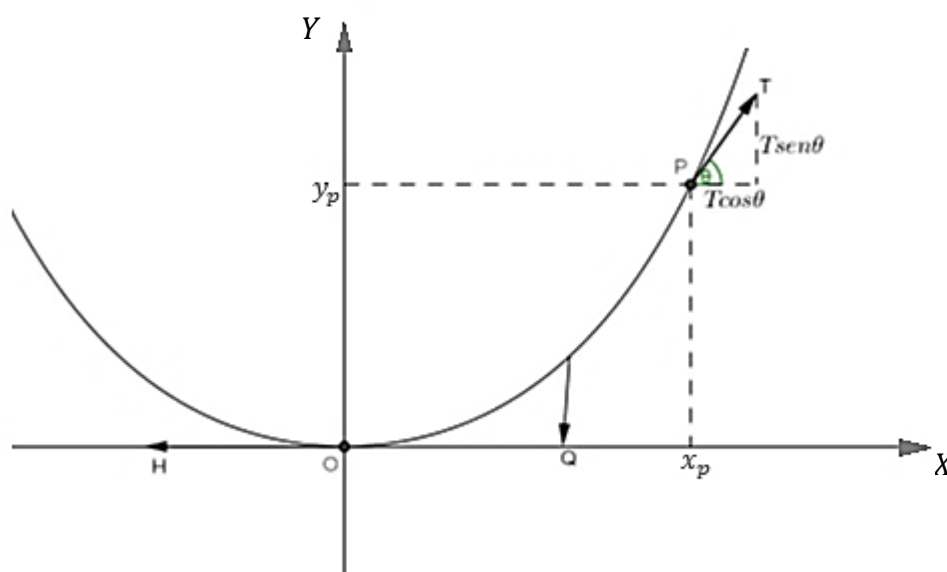


Figura 6.29 - Representação gráfica de um ponto do cabo.

Considera-se $P(x_p, y_p)$ um ponto qualquer do cabo. Considera-se agora o arco OP que, em razão do equilíbrio estático, encontra-se submetido a ação das seguintes forças:

T é a tensão que atua, tangencialmente, em P e forma um ângulo θ com o eixo x .

H é a tensão da corda no ponto O , agindo horizontalmente.

Q é o peso do trecho OP da corda, cujo comprimento é s e atua verticalmente.

Admite-se que todos os pontos do cabo têm o mesmo peso (se um ponto fosse mais pesado que os outros, não seria uma catenária). Como o cabo encontra-se em equilíbrio estático, todas as forças resultantes que atuam sobre cada ponto são iguais a zero.

A força de tensão é variável ao longo do cabo e tem sempre a direção tangente à curva em cada ponto. Portanto, o cabo tende a curvar-se seguindo as direções da tensão.

O equilíbrio estático garante então que a soma dessas três forças que agem sobre OP é nula:

$$H + T + Q = 0 \quad (6.3)$$

Decompondo essa equação de equilíbrio sobre os eixos, tem-se:

$$-H + T \cos \theta = 0 \quad (6.4)$$

$$-Q + T \sin \theta = 0 \quad (6.5)$$

Da razão entre as equações (6.4) e (6.5) temos:

$$\tan \theta = \frac{Q}{H} \quad (6.6)$$

Conhecendo-se a densidade linear do cabo q (peso por unidade de comprimento), o peso do arco s pode ser escrito como $Q = qs$ e, portanto,

$$\tan \theta = \frac{q}{H} s \quad (6.7)$$

Observa-se que a densidade linear q e a tensão H são constantes e, portanto, assume-se $\frac{q}{H} = k$.

Sabe-se que $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{k} \quad (6.8)$$

O comprimento do arco $OP(s)$ é dado por:

$$s = \int_0^{x_p} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (6.9)$$

e assim,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (6.10)$$

Pode-se calcular $\frac{ds}{dx}$ diferenciando-se ambos os lados da equação (6.8) relativamente a x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{k} \frac{ds}{dx} \quad (6.11)$$

Substituindo-se (6.11) em (6.10) tem-se a seguinte equação diferencial:

$$k \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (6.12)$$

A equação (6.12) é denominada como a equação diferencial da catenária. Considerando-se $\frac{dy}{dx} = p$, tem-se:

$$k \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2} \quad (6.13)$$

que resulta em uma equação diferencial de primeira ordem com variáveis separadas:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{k} \quad (6.14)$$

Com integração de ambos os membros da equação (6.14), temos:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int \frac{dx}{k} \quad (6.15)$$

Sabe-se que:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) \quad (6.16)$$

Portanto, (6.15) assume a forma:

$$\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \frac{x}{k} + c \quad (6.17)$$

Para $x = 0$, tem-se $p(0) = y'(0) = 0$. Logo, $c = 0$ e a equação acima resulta em:

$$\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \frac{x}{k} \quad (6.18)$$

A solução pode ser escrita como

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x}{k}} \quad (6.19)$$

ou ainda,

$$1 + p^2 = e^{\frac{2x}{k}} - 2p\sqrt{1+p^2} - p^2 \quad (6.20)$$

Como $e^{\frac{x}{k}} - p = \sqrt{1+p^2}$, substituindo em (6.20) tem-se:

$$p = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2} \quad (6.21)$$

Logo,

$$p = \sinh\left(\frac{x}{k}\right) \quad (6.22)$$

Sabendo que $p = \frac{dy}{dx}$ e $p = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2}$, tem-se que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2} \quad (6.23)$$

Integrando ambos os lados,

$$\int dy = \frac{1}{2} \int \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right) dx \quad (6.24)$$

$$y(x) = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right) + c_1 \quad (6.25)$$

Para $y(0) = 0$, tem-se:

$$c_1 = -k \quad (6.26)$$

Chega-se à solução geral na forma:

$$y(x) = k \left(\frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2} \right) - k \quad (6.27)$$

Substituindo-se $\cosh\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2}$, tem-se:

$$y(x) = k \left[\cosh\left(\frac{x}{k}\right) - 1 \right] \quad (6.28)$$

A equação (6.28) corresponde à curva catenária, particularizada para o caso em que a origem do sistema de referência coincide com o ponto de mínima altura para o cabo suspenso em dois pontos quaisquer no espaço. A Figura 6.30 mostra essa curva, para x compreendido entre -360 e 360 . Conhecendo-se a posição da carga terminal, o valor da constante k foi calculado com a utilização do algoritmo da bissecção. A parte da curva que interessa aparece em vermelho na Figura 6.30, correspondente à configuração final do cabo obtida com a simulação (Figura 6.26). Observa-se que, caso a fixação inferior do cabo fosse feita no final da curva em vermelho (como de fato foi considerado na simulação), a forma espacial do cabo não se alteraria. A Figura 6.31 mostra o que seria o lado esquerdo da Figura 6.30, mas com os eixos deslocados de forma a se poder comparar, no mesmo aspecto gráfico, com a configuração final do cabo obtida via simulação.

A Figura 6.32 mostra as duas curvas no mesmo gráfico, ou seja, a curva relativa à configuração espacial final do cabo em equilíbrio estático (em vermelho) e curva analítica (catenária) (em azul). As curvas são muito próximas e este é de fato um resultado já esperado. As constantes elásticas do modelo são pequenas o suficiente para que o sistema tenha de fato o comportamento dinâmico de um cabo. Evidentemente, quanto maiores forem consideradas estas constantes, mais o sistema passaria a se assemelhar a uma viga e assim, o equilíbrio estático final não mais obedeceria à catenária.

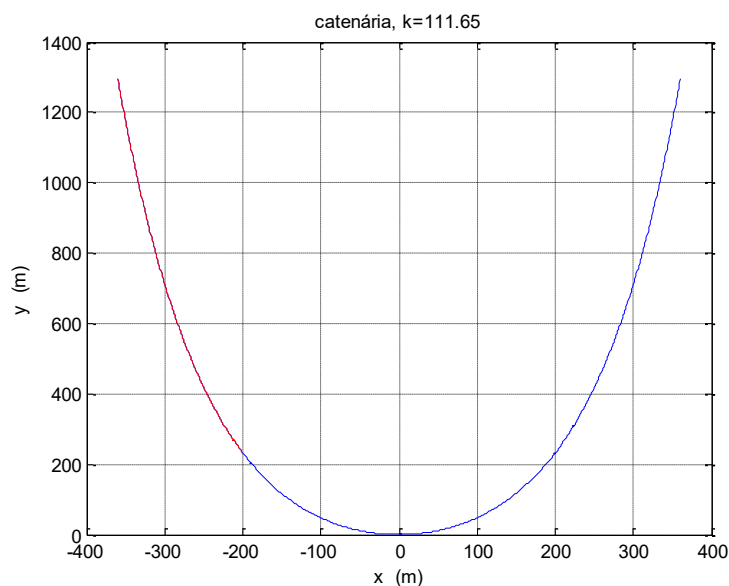


Figura 6. 30 - A Catenária

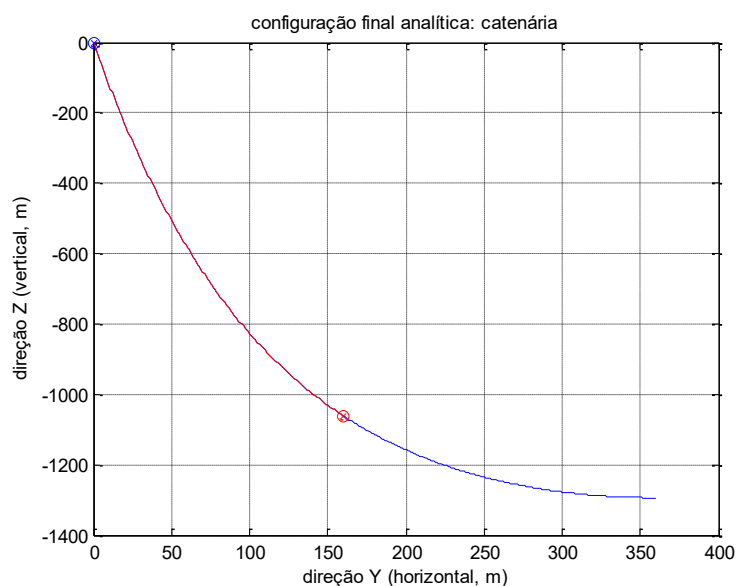


Figura 6.31 - Representação da Catenária.

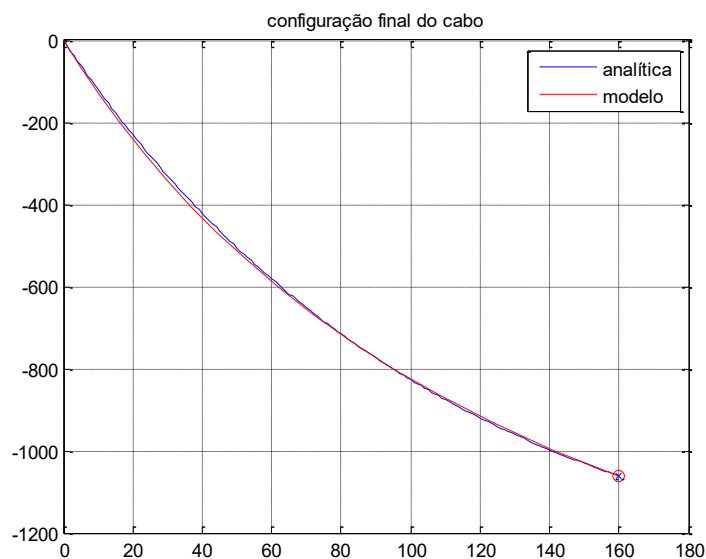


Figura 6.32 - Comparação entre o resultado de uma simulação após o equilíbrio estático e a curva catenária.

6.6 ANÁLISE SOBRE TENSÕES

O objetivo dessa seção é realizar uma análise sobre as tensões que se propagam ao longo do cabo, considerando-o com uma das extremidades fixa à Terra. As tensões em cada elo são determinadas utilizando-se o algoritmo (5.43), tratando-se da norma do vetor:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i \text{abs} \left(\frac{\vec{F}_i \vec{\mu}_i}{|\vec{F}_i|} \right) \quad (6.31)$$

para $i = n : 1$, com decremento igual a -1 . Portanto, as tensões são obtidas começando-se do último até o primeiro elo. As tensões nos elos, calculadas a partir da equação (6.31) são devidas às forças de vínculo exercidas na extremidade do elo que está fixa à Terra, ou seja, não estão sendo consideradas as tensões devidas às forças correlatas ao peso e ao empuxo.

Nas simulações mostradas a seguir o cabo está no ambiente subaquático, articulado à plataforma móvel em uma extremidade e fixo no fundo do oceano na sua outra extremidade. Considerou-se o modelo com 16 elos. A fixação no fundo do oceano foi efetuada a partir das mesmas forças de controle utilizadas para a manutenção da carga terminal do cabo fixa em um ponto, conforme visto na seção anterior.

A Figura 6.33 mostra as tensões nos dezesseis elos, para o caso em que o equilíbrio estático é atingido a partir de uma configuração espacial inicial, idêntica à utilizada na geração da simulação para a comparação do equilíbrio estático com a catenária (Figura 6.32). Neste caso não há força externa na plataforma, de forma que o equilíbrio estático final é atingido e assim, as tensões nos elos tendem à estabilização. Na Figura 6.34 pode ser vista a posição vertical da plataforma. Observa-se que esta também tende a se estabilizar após 120 s, resultado já esperado em razão da ausência de força externa aplicada na plataforma.

A Figura 6.35 mostra as tensões nos elos para uma simulação semelhante a anterior, mas aplicando-se uma força senoidal na plataforma móvel equivalente $10000\sin(0.15\pi t)$ N. Neste caso, e conforme já esperado, não há mais estabilização e as tensões seguem um padrão de oscilações com a mesma frequência da força externa na plataforma, padrão este estabelecido após um regime transitório de curta duração (aproximadamente 40 s). A Figura 6.36 mostra a posição da plataforma móvel, na qual se percebe também um padrão de oscilações constantes, após um período transitório. Porém, há um defasamento significativo entre as oscilações da plataforma e as oscilações vistas nas tensões dos elos, devendo-se este fenômeno a toda a dinâmica flexível existente entre a aplicação do esforço externo e os elos nos quais ocorrem as tensões.

Observa-se, finalmente, que em ambos os casos, os maiores picos de tensão ocorreram nos elos mais próximos à extremidade fixa no fundo do oceano, resultado já esperado em razão de ser nessa extremidade o local de aplicação das forças de vínculo.

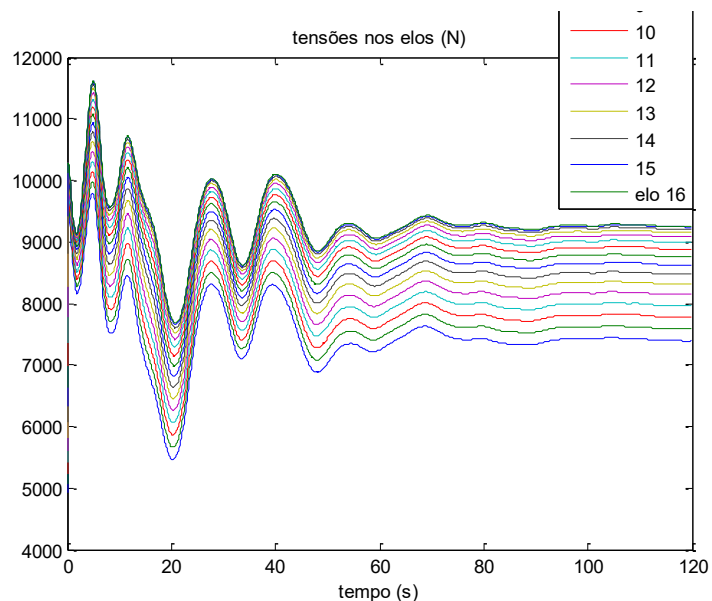


Figura 6. 33 - Tensões nos elos, sem força aplicada na plataforma móvel.

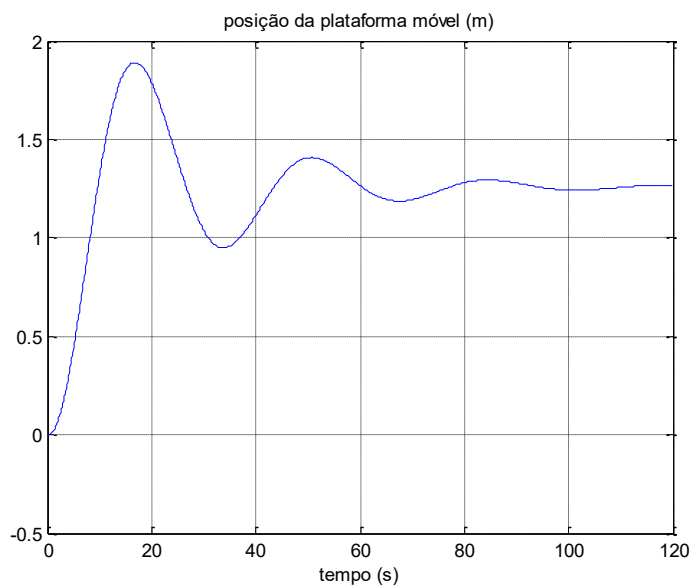


Figura 6. 34 - Posição da plataforma móvel, sem a aplicação de força externa.

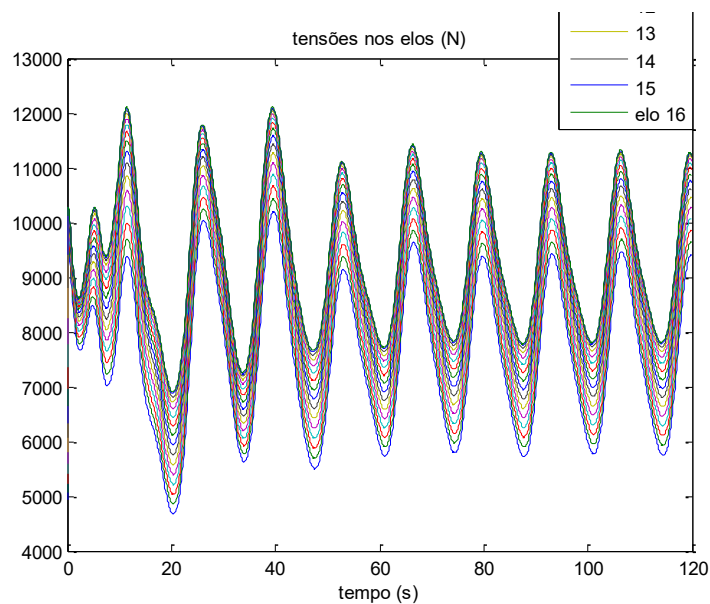


Figura 6. 35 - Tensões nos elos, com força aplicada na plataforma móvel.

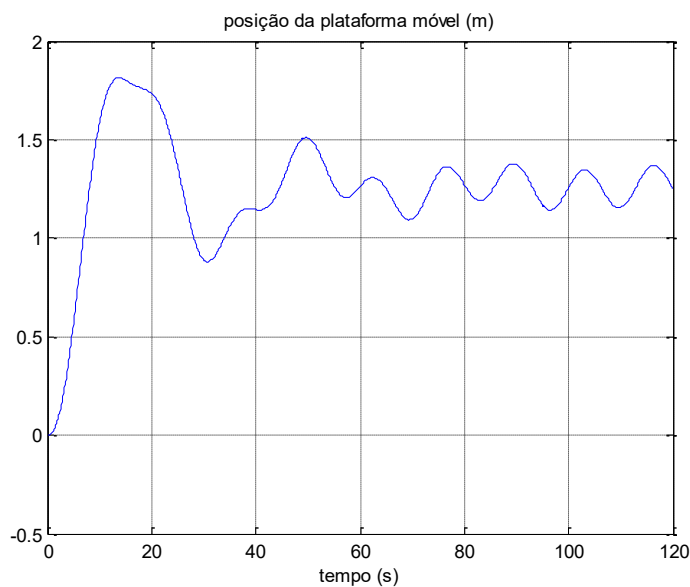


Figura 6. 36 - Posição da plataforma móvel, sem a aplicação de força externa.

No Capítulo VII são apresentadas as conclusões gerais a respeito dos estudos tratados na presente dissertação.

CAPÍTULO VII
CONCLUSÕES

No presente capítulo apresentam-se as conclusões gerais obtidas nesta dissertação, assim como são indicadas sugestões para trabalhos futuros.

Desde o início dos trabalhos de pesquisa que deram origem a todos os resultados que compuseram a presente dissertação, tinha-se como foco determinar modelos dinâmicos também genéricos, ou seja, que pudessem ser gerados automaticamente para qualquer número de elos, para o caso em que o cabo não mais é articulado a uma estrutura fixa e sim, a uma plataforma móvel, permitindo movimento na vertical. Esta situação foi escolhida em razão da semelhança que a mesma guarda com relação ao caso de um cabo conectado a uma embarcação de superfície. Além deste foco principal, outros objetivos somaram-se a este e passaram a ser incluídos na presente pesquisa:

- Considerar o cabo acoplado em uma das suas extremidades a uma plataforma móvel e, sua outra extremidade, estaria livre (com uma carga terminal) ou fixa ao fundo do mar, constituindo situações próximas a aplicações reais no ambiente subaquático;
- Realizar diversas simulações em situações nas quais o comportamento dinâmico do cabo seria conhecido a priori, de forma a verificar se o modelo seria capaz de reproduzir resultados esperados fisicamente;
- Para o caso em que o cabo tem uma das suas extremidades fixa ao fundo do mar, realizar uma análise sobre as tensões ao longo do cabo, nos casos de respostas transitórias, ou seja, em situações dinâmicas;
- Promover a fixação da carga terminal do cabo em um ponto qualquer no ambiente subaquático, a partir da aplicação de forças de vínculo geradas utilizando-se um controle proporcional e derivativo (PD) em posição;
- Realizar uma análise estática do cabo, comparando o seu equilíbrio estático final (no caso de uma das extremidades fixa ao fundo do mar) com uma solução analítica a partir da curva catenária.

Esta dissertação insere-se em um contexto de continuação de uma tese de doutorado e duas dissertações de mestrado desenvolvidas anteriormente, de forma que o foco principal, bem como os demais objetivos expostos acima formam o conjunto de contribuições exclusivas do presente trabalho, diferenciando-o dos anteriores, mas conectando-o a estes em razão do seu caráter de continuação.

Inicialmente houve a necessidade de se desenvolver manualmente os modelos dinâmicos para os casos de um, dois, três e quatro elos, aproximando a flexibilidade

contínua do cabo. A inclusão da plataforma móvel significa um grau de liberdade a mais para dinâmica do sistema. Foi verificado que este grau de liberdade a mais significava a inclusão de uma primeira linha e uma primeira coluna a todas as matrizes do modelo dinâmico, bem como a inclusão de um primeiro elemento a todos os vetores deste modelo. A análise destes novos elementos que surgiram em razão da inclusão da plataforma móvel, realizada nos casos de um, dois, três e quatro elos, permitiu o desenvolvimento de algoritmos genéricos que possibilitaram determinar estes elementos para um número qualquer de elos. Foi verificado ainda que os demais elementos dos vetores e matrizes do modelo permanecem inalterados, de forma que foi possível aproveitar algoritmos genéricos desenvolvidos em trabalhos anteriores. Foi realizada uma programação no ambiente MATLAB® para mesclar os algoritmos novos com os anteriores, fato que possibilitou a geração de um software que permite, apenas conhecendo-se o número de elos, gerar de forma automática o modelo dinâmico, modelo este que inclui a plataforma móvel.

Quando se considerou a aplicação de esforços na plataforma móvel, estes foram senoidais, de forma a simular o movimento vertical de uma embarcação na superfície do mar. Havia naturalmente o interesse no estudo da influência deste movimento sobre a dinâmica do cabo em razão do evidente acoplamento dinâmico entre cabo e plataforma móvel.

Desenvolveu-se um estudo para a determinação dos torques de elevação, azimute e torção em cada uma das articulações fictícias, devidos a forças e torque aplicados à carga terminal do cabo, já para o caso de se considerar os esforços aplicados no referencial do corpo. Inicialmente os esforços são transformados para o referencial inercial e posteriormente são calculados os torques de elevação, azimute e torção em cada articulação. Verificou-se que a inclusão da plataforma móvel não modifica o equacionamento para a geração dos torques nas articulações fictícias, de forma que foi possível a utilização dos algoritmos genéricos já desenvolvidos anteriormente. Em síntese, estes algoritmos permitem a geração de todos os torques de elevação, azimute e torção atuantes em todas as articulações fictícias, independentemente do número de elos adotado. Estes algoritmos possibilitaram a realização de análises sobre as tensões atuantes ao longo do cabo, para o caso do cabo fixo ao fundo do mar. Foram testadas duas situações distintas: com e sem a aplicação de esforços na plataforma móvel. Nesta análise foram negligenciadas as influências do peso e do empuxo na geração de tensões internas, ou seja, havia o interesse em analisar a influência das forças de vínculo na extremidade final

do cabo conectada à Terra, gerando tensões internas ao cabo ao longo de toda a sua estrutura. Verificou-se que as tensões são maiores em regiões do cabo próximas à sua extremidade fixa à Terra, na qual atuam as forças de vínculo. Este era um resultado já esperado.

Quando se considerou a carga terminal do cabo livre, foram realizadas simulações em queda livre e também com forças aplicadas na carga terminal. Este tipo de simulação assemelha-se ao caso de uma embarcação de superfície conectada a um veículo subaquático do tipo ROV a partir de um cabo umbilical. Em alguns casos, o cabo foi posto em uma determinada configuração espacial inicial e solto a partir do repouso. Em outros casos, o cabo estava inicialmente em repouso, totalmente na vertical e foram aplicadas forças na carga terminal, já no referencial em alguns casos, ou no referencial do corpo em outras situações. No referencial do corpo, as forças aplicadas geram também torques sobre a carga terminal, situação esta muito semelhante ao caso do ROV. Todos os casos foram escolhidos criteriosamente, de forma a se saber, a priori, qual deveria ser o comportamento do cabo em sua trajetória espacial e, sem exceção, os resultados das simulações mostraram-se conforme o esperado fisicamente.

Um software para a animação da configuração espacial do cabo em três dimensões foi utilizado para a visualização dos resultados de simulações. Algumas figuras mostradas na presente dissertação trazem uma sequência de frames coletados da animação, mas a uma frequência bem menor do que a escolhida para a discretização da solução numérica. Porém, estas animações, quando visualizadas computacionalmente e, portanto, a uma frequência bem maior na exposição da sequência de frames, mostraram, em todos os casos, uma grande sensação de realidade física. Não se dispõe ainda de resultados experimentais. Porém, a base de todo o desenvolvimento dos modelos é o formalismo clássico de Euler-Lagrange e ainda, as simulações mostraram, em todos os casos, resultados condizentes com o esperado fisicamente e com ótima sensação de realidade física, atestando assim que, pelo menos qualitativamente, pode-se dizer que a modelagem dinâmica é coerente e que, quanto maior o número de elos utilizados na tentativa de aproximar a flexibilidade contínua do cabo, maior é a impressão de continuidade observada nas animações em três dimensões.

Utilizou-se um controle proporcional e derivativo (PD) com o objetivo de manter a carga terminal do cabo fixa em uma posição qualquer do ambiente subaquático, controle este efetivado a partir da aplicação de forças externas na própria carga terminal. Os resultados foram bons, a carga terminal de fato fica aproximadamente imóvel, na posição

espacial de referência escolhida previamente. Este resultado corrobora também para validar os algoritmos genéricos relativos à aplicação de esforços externos na carga terminal, com conseqüente determinação de todos os torques atuantes nas articulações fictícias do cabo.

Foi realizada uma análise estática relativa à configuração espacial do cabo, considerando-se uma das suas extremidades fixa ao fundo do mar. O cabo foi posto inicialmente em uma configuração espacial inicial e a simulação foi realizada até um tempo final de 360 s, quando o mesmo já se encontrava em equilíbrio estático. Esta configuração foi comparada com a curva catenária e verificou-se que os resultados numérico e analítico aproximadamente coincidem. Este resultado já esperado confirma também que os parâmetros escolhidos para o modelo dinâmico o fazem-no se comportar dinamicamente de fato como um cabo.

Como trabalhos futuros, pretende-se reunir esforços no sentido da validação experimental quantitativa dos modelos dinâmicos desenvolvidos. A ideia inicial seria fixar uma das extremidades do cabo e deixa-lo livre em sua outra extremidade, na qual se colocaria uma carga terminal. Utilizando-se câmeras de vídeo no ambiente do laboratório no qual se realizariam os experimentos, seriam identificadas as configurações espaciais do cabo em cada instante de tempo discreto pré-estabelecido. A confrontação com resultados experimentais permitiria ainda o desenvolvimento de estudos para a identificação paramétrica, baseada em algoritmos de minimização do erro entre simulação e experimento.

CAPÍTULO VIII
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANTUNES, E. B. **Modelagem e Simulação de Estruturas Flexíveis – Cabos e Placas**. Rio de Janeiro, RJ, 2010. 145 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- [2] ASSIS, M. R. de, **Modelagem e Validação Experimental de uma Estrutura Flexível**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Taubaté, 2012.
- [3] BI, G.; ZHU, S.; LIU, J.; FANG, X.; WANG, L. **Dynamic Simulation and Tension Compensation Research on Subsea Umbilical Cable Laying System**. In: J. Marine Sci. Appl., v. 12, p. 452-458, September 2013.
- [4] CHANG, S.; PARK, J.; LEE, K. **Nonlinear Dynamic Analysis of Spatially Suspended Elastic Catenary Cable with Finite Element Method**. In: KSCE Journal of Civil Engineering, v. 12, no. 2, p. 121-128, March 2008.
- [5] CORDOVÉS, D.C.S. **Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais**. São Paulo, 2008. 134 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [6] DI MARZO, G. R. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais**. São Paulo, SP, 2010. 106 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da USP – Universidade de São Paulo.
- [7] EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 2ª reimpressão 1999, 496 p., páginas 269 a 279.
- [8] FANG, Z.; HE, Q.; XIANG, B.; XIAO, H.; HE, K.; DU, Y. **A Finite Element Cable Model and Its Applications Based on the Cubic Spline Curve**. In: China Ocean Eng., v. 27, n. 5, p. 683-692, December 2012.
- [9] FREITAS, M. B. C. S. B. **As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações**. João Pessoa, PB, 2015. 35 p. Dissertação (PROFMAT), UFPB - Universidade Federal da Paraíba.
- [10] GOBAT, J. I.; GROSENBAUGH, M. A. **Application of the Generalized- α Method to the Time Integration of the Cable Dynamics Equations**. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 190, Issues 37-38, p. 4817-4829, June 2001.
- [11] GOMES, S. C. P.; ZANELA, E. B.; PEREIRA, A. E. L. **Automatic Generation of Dynamic Models of Cables**. In: Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 121, p. 559-571, 2016.

- [12] GROSENBAUGH, M. A.; HOWELL, C. T.; MOXNES, S. **Simulating the Dynamics of Underwater Vehicles with Low-tension Tethers**. In: International Journal of Offshore and Polar Engineering, v. 3, no. 3, ISSN 1053-5381, September 1993.
- [13] GUO, A.; XU, Y.; LI, H. **Dynamic Performance of Cable-stayed Bridge Tower with Multi-stage Pendulum Mass Damper Underwind Excitations – I: Theory**. In: Earthquake Engineering and Engineering Vibration, v. 6, Issue 3, p. 295-306, September 2007.
- [14] ISOLDI, L. A. **Análise Numérica da Dinâmica de Cabos Altamente Extensíveis**. Rio Grande, RS, 2002. 143 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- [15] LIU, Y.; QIAN, Z.; XIA, K.; **Mechanical Response of Transmission Lines Based on Sliding Cable Element**. In: J. Cent. South Univ., v. 21, p. 3370-3377, August 2013.
- [16] LUONGO, A.; ZULLI, D.; PICCARDO, G. **Analytical and Numerical Approaches to Nonlinear Galloping of Internally-resonant Suspended Cables**. In: Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 315(3), p. 375-393, 2008.
- [17] MACHADO, C. C.; PEREIRA, A. E. L.; GOMES, S. C. P.; DE BORTOLI, A. L. **Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis**. In: Revista Controle e Automação, v. 13, p. 134-140, 2002.
- [18] MACHADO, C. C., **Modelagem Matemática e Controle Ativo de um Manipulador com um Elo Flexível**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do rio Grande do Sul (UFRGS), 2007.
- [19] MASCIOLA, M. D.; NAHON, M.; DRISCOLL, F. R. **Static Analysis of the Lumped Mass Cable Model Using a Shooting Algorithm**. In: J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng., v. 138(2), p. 164-171, March-April 2012.
- [20] NAHON, M. **Dynamics and Control of a Novel Radio Telescope Antenna**. In: The American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA-99-4120, p. 214-222, 1999.
- [21] NASCIMENTO, C. A. M. **Modelagem Numérica de Vibrações em Cabos de Transmissão de Energia Elétrica**. Brasília, DF, 2011. 71 p. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica), UnB – Universidade de Brasília.
- [22] OLIVEIRA, V. S., **Algoritmos Genéricos para a Geração de Modelos Dinâmicos de Cabos Umbilicais de Veículos Subaquáticos**. Rio Grande, RS,

2015. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- [23] OMURTAG, A.; LYTTON, W. W. **Spectral Method and High-order Finite Differences for the Nonlinear Cable Equation**. In: Neural Comput., v. 22(8), p. 2113-2136, August 2010.
- [24] PATHOTE, P. **Efficient Mathematical Model for Prestressing Cables and Its Implementation in Computer Analysis**. In: IOSR Journal of Mathematics (IOSR- JM), e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X, v. 10, Issue 3, Ver. V, p. 32-38, May-June 2014.
- [25] PEREIRA, A. E. L. **Um Estudo sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis**. Porto Alegre, RS, 1999. 144 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada), UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [26] PEREIRA, A. E. L. **O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-estrutura de um Cabo**. Porto Alegre, RS, 2010. 178 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada), UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [27] POUZADA, T. A., **Algoritmos Genéricos para a Geração Automática de Modelos de Cabos em Três Situações Práticas de Aplicações Subaquáticas**. Rio Grande, RS, 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- [28] ROCHA, I. B. P. **Modelagem Matemática de Cabos Umbilicais e Veículos Subaquáticos Não Tripulados**. Rio Grande, RS, 2013. 116 p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- [29] ROCHINHA, A; SAMPAIO, R; LE TALLEC, P. **O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais**. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingenieria. Vol. 6,1, 97-108 (1990).
- [30] SANTOS, L. R. **Modelagem Não-linear da Dinâmica de Cabos Submarinos**. Rio de Janeiro, RJ, 2007. 100 p. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Mecânica), COPPE-UFRJ – Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [31] SRIVASTAVA, V. K.; YVSS, S.; TAMSIR, M. **Dynamic Behavior of Underwater Towed-cable in Linear Profile**. 2011. In: International Journal of Scientific & Engineering Research, v. 2, Issue 7, ISSN 2229-5518, July 2011.

- [32] SUN, F. J.; ZHU, Z. H.; LAROSA, M. **Dynamic Modeling of Cable Towed Body Using Nodal Position Finite Element Method**. In: Ocean Engineering Journal, Elsevier, December 2010. Disponível em: www.elsevier.com/locate/oceaneng. Acesso em 13/05/2015.
- [33] VAZ, M. A.; PATEL, M. H. **Transient Behaviour of Towed Marine Cables in Two Dimensions**. In: Applied Ocean Research, Elsevier, v. 17(1995), p. 143-153, August 1995.
- [34] ZANELA, E. B. **Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas**. Rio Grande, RS, 2013. 147 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), FURG – Universidade Federal do Rio Grande.
- [35] ZHAO, W.; CHEN, L.; JEAN, W. Z. **A Finite Difference Method for Simulating Transverse Vibrations of an Axially Moving Viscoelastic String**. In: Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), Editorial Committee of Appl. Math. Mech., ISSN 0253-4827, 27(1), p. 23-28, September 2005.

APÊNDICE A

**Elementos das matrizes e vetores para o cabo dividido em um,
dois, três e quatro elos**

APÊNDICE A.1

CABO APROXIMADO POR UM ÚNICO ELO

Elementos da matriz de inércia I :

$$I_{11} = M + m_1 + m_c$$

$$I_{12} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e_1}$$

$$I_{13} = I_{14} = 0$$

$$I_{21} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_c\right) l_1 \sin \theta_{e_1}$$

$$I_{22} = \left(M + \frac{m_1}{4} + m_c\right) l_1^2 + I_{e_1}$$

$$I_{23} = I_{24} = I_{31} = I_{32} = 0$$

$$I_{33} = (m_1 + 2m_c) l_1 \sin^2 \theta_{e_1} + I_{a_1}$$

$$I_{34} = I_{41} = I_{42} = I_{43} = 0$$

$$I_{(4,4)} = I_{T_1} + I_{T_c}$$

Elementos da matriz dos coeficientes de atrito C :

$$C_{11} = C_M$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{21} = 0$$

$$C_{22} = C_{e_1}$$

$$C_{23} = C_{24} = C_{31} = C_{32} = 0$$

$$C_{33} = C_{a_1}$$

$$C_{34} = C_{41} = C_{42} = C_{43} = 0$$

$$C_{44} = C_{T_1}$$

Elementos da matriz dos coeficientes de atrito K :

$$K_{11} = K_M$$

$$K_{12} = K_{13} = K_{14} = K_{21} = 0$$

$$K_{22} = K_{e_1}$$

$$K_{23} = K_{24} = K_{31} = K_{32} = 0$$

$$K_{33} = K_{a_1}$$

$$K_{34} = K_{41} = K_{42} = K_{43} = 0$$

$$K_{44} = K_{T_1}$$

Componentes do vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos \vec{F} :

$$f_1 = -\left(\frac{m_1}{2} + m_c\right) l_1 \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1}^2$$

$$f_2 = -\left(\frac{m_1}{4} + 2m_c\right) l_1^2 \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2$$

$$f_3 = (m_1 + 2m_c) l_1 \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}$$

$$f_4 = 0$$

Componentes do vetor de esforços gravitacionais \vec{G} :

$$g_1 = -m_1 g$$

$$g_2 = -\left(\frac{m_1}{2} + m_c\right) l_1 g \sin \theta_{e_1}$$

$$g_3 = g_4 = 0$$

Componentes do vetor de esforços externos \vec{T} :

$$T_1 = u(t)$$

$$T_2 = \tau_{e_1}$$

$$T_3 = \tau_{a_1}$$

$$T_4 = \tau_{T_1}$$

APÊNDICE A.2

CABO DE DOIS ELOS

Elementos da matriz de inércia I :

$$I_{11} = M + m_1 + 4m_2 + 4m_c$$

$$I_{12} = -l_1 \left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 2m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1}$$

$$I_{13} = -l_2(m_2 + 2m_c) \text{sen } \theta_{e_2}$$

$$I_{14} = I_{15} = I_{16} = I_{17} = 0$$

$$I_{21} = -l_1 \left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 2m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1}$$

$$I_{22} = l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) + I_{R_{e_1}}$$

$$I_{23} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) (\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2})$$

$$I_{24} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2}$$

$$I_{25} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2}$$

$$I_{26} = I_{27} = 0$$

$$I_{31} = -l_2(m_2 + 2m_c) \text{sen } \theta_{e_2}$$

$$I_{32} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) (\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2})$$

$$I_{33} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) + I_{R_{e_2}}$$

$$I_{34} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2}$$

$$I_{35} = I_{36} = I_{37} = I_{41} = 0$$

$$I_{42} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2}$$

$$I_{43} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2}$$

$$I_{44} = l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_1} + l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + \\ + 2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + 2m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + I_{R_{a_1}}$$

$$I_{45} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2}$$

$$I_{46} = I_{47} = I_{51} = 0$$

$$I_{52} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{a_2}$$

$$I_{53} = 0$$

$$I_{54} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2}$$

$$I_{55} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} + I_{Ra_2}$$

$$I_{56} = I_{57} = I_{61} = I_{62} = I_{46} = I_{63} = I_{64} = I_{65} = 0$$

$$I_{66} = I_{T_1}$$

$$I_{67} = I_{71} = I_{72} = I_{73} = I_{74} = I_{75} = I_{64} = I_{76} = 0$$

$$I_{77} = I_{T_2} + I_{T_c}$$

Elementos da matriz dos coeficientes de atrito C :

$$C_{11} = C_M$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{17} = C_{21} = 0$$

$$C_{22} = C_{e_1} + C_{e_2}$$

$$C_{23} = -C_{e_2}$$

$$C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{27} = C_{31} = 0$$

$$C_{32} = C_{23}$$

$$C_{33} = C_{e_2}$$

$$C_{34} = C_{35} = C_{36} = C_{37} = C_{41} = C_{42} = C_{43} = 0$$

$$C_{44} = C_{a_1} + C_{a_2}$$

$$C_{45} = -C_{a_2}$$

$$C_{46} = C_{47} = C_{51} = C_{52} = C_{53} = 0$$

$$C_{54} = C_{45}$$

$$C_{55} = C_{a_2}$$

$$C_{56} = C_{57} = C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = C_{65} = 0$$

$$C_{66} = C_{T_1} + C_{T_2}$$

$$C_{67} = -C_{T_2}$$

$$C_{71} = C_{72} = C_{73} = C_{74} = C_{75} = 0$$

$$C_{76} = C_{67}$$

$$C_{77} = C_{T_2}$$

Elementos da matriz dos coeficientes de atrito K :

$$K_{11} = K_M$$

$$K_{12} = K_{13} = K_{14} = K_{15} = K_{16} = K_{17} = K_{21} = 0$$

$$K_{22} = K_{e_1} + K_{e_2}$$

$$K_{23} = -K_{e_2}$$

$$K_{24} = K_{25} = K_{26} = K_{27} = K_{31} = 0$$

$$K_{32} = K_{23}$$

$$K_{33} = K_{e_2}$$

$$K_{34} = K_{35} = K_{36} = K_{37} = K_{41} = K_{42} = K_{43} = 0$$

$$K_{44} = K_{a_1} + K_{a_2}$$

$$K_{45} = -K_{a_2}$$

$$K_{46} = K_{47} = K_{51} = K_{52} = K_{53} = 0$$

$$K_{54} = K_{45}$$

$$K_{55} = K_{a_2}$$

$$K_{56} = K_{57} = K_{61} = K_{62} = K_{63} = K_{64} = K_{65} = 0$$

$$K_{66} = K_{T_1} + K_{T_2}$$

$$K_{67} = -K_{T_2}$$

$$K_{71} = K_{72} = K_{73} = K_{74} = K_{75} = 0$$

$$K_{76} = K_{67}$$

$$K_{77} = K_{T_2}$$

Componentes do vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos \vec{F} :

$$f_1 = -l_1 \left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 2m_c \right) \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1}^2 - (m_2 + 2m_c) l_2 \cos \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2}^2$$

$$f_2 = -2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \left[\cos \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{e_2} + \dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2}^2 \right\} +$$

$$-l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + 2m_c \right) \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2$$

$$f_3 = -2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \left[-\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{e_1} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{a_2} (\dot{\theta}_{e_1}^2 + \dot{\theta}_{a_1}^2) \right] - \frac{1}{2} \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_1}^2 \right\} +$$

$$-2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \left\{ \sin \theta_{e_2} \left[\cos \theta_{e_2} \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{1}{2} \cos \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2) \right] \right\}$$

$$f_4 = 2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right.$$

$$\left. + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} - \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\dot{\theta}_{e_2}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 - \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right] +$$

$$+ 2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2}$$

$$f_5 = 2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right.$$

$$\left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \left(\frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2}{2} \right) \right] +$$

$$+ 2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2}$$

$$f_6 = f_7 = 0$$

Componentes do vetor de esforços gravitacionais \vec{G} :

$$g_1 = -(m_1 + m_2)g$$

$$g_2 = l_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g \operatorname{sen} \theta_{e_1}$$

$$g_3 = \frac{m_2}{2} l_2 g \operatorname{sen} \theta_{e_2}$$

$$g_4 = g_5 = g_6 = g_7 = 0$$

Componentes do vetor de esforços externos \vec{T} :

$$T_1 = u(t)$$

$$T_2 = \tau_{e_1}$$

$$T_3 = \tau_{e_2}$$

$$T_4 = \tau_{a_1}$$

$$T_5 = \tau_{a_2}$$

$$T_6 = \tau_{T_1}$$

$$T_7 = \tau_{T_2}$$

APÊNDICE A.3

CABO DE TRÊS ELOS

Elementos da matriz de inércia I :

$$I_{11} = M + m_1 + 4m_2 + 3M_3 + 9m_c$$

$$I_{12} = -l_1 \left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 3M_3 + 3m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1}$$

$$I_{13} = -l_2(m_2 + 3m_3 + 3m_c) \text{sen } \theta_{e_2}$$

$$I_{14} = -l_3 \left(\frac{3m_3}{2} + 3m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3}$$

$$I_{15} = I_{16} = I_{17} = I_{18} = I_{19} = I_{1,10} = 0$$

$$I_{21} = -l_1 \left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 3m_3 + 3m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1}$$

$$I_{22} = l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) + I_{R e_1}$$

$$I_{23} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) (\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2})$$

$$I_{24} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3}]$$

$$I_{25} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} +$$

$$+ l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3})$$

$$I_{26} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} +$$

$$- l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3})$$

$$I_{27} = -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3})$$

$$I_{28} = I_{29} = I_{2,10} = 0$$

$$I_{31} = -l_2(m_2 + 3m_3 + 3m_c) \text{sen } \theta_{e_2}$$

$$I_{32} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) (\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2})$$

$$I_{33} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) + I_{R e_2}$$

$$I_{34} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) (\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3})$$

$$I_{35} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} + \\ - l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3}$$

$$I_{36} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3}$$

$$I_{37} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3}$$

$$I_{38} = I_{39} = I_{3,10} = 0$$

$$I_{41} = -l_3 \left(\frac{3m_2}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3}$$

$$I_{42} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3}]$$

$$I_{44} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) + I_{R_{e_3}}$$

$$I_{45} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3}$$

$$I_{46} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3}$$

$$I_{47} = I_{48} = I_{49} = I_{4,10} = I_{5,1} = 0$$

$$I_{52} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} + \\ + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3})$$

$$I_{53} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} + \\ - l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3}$$

$$I_{54} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3}$$

$$I_{55} = l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_1} + l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + \\ + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + 2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \\ + 2l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + I_{R_{a_1}}$$

$$I_{56} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + \\ + l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \\ + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3}$$

$$I_{57} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3}$$

$$I_{58} = I_{59} = I_{5,10} = I_{61} = 0$$

$$I_{62} = -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{a_2} + \\ - l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3})$$

$$I_{63} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{a_3}$$

$$I_{64} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{a_3}$$

$$I_{65} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + \\ + l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \\ + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3}$$

$$I_{66} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + \\ + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + I_{R_{a_2}}$$

$$I_{67} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3}$$

$$I_{68} = I_{69} = I_{6,10} = I_{71} = 0$$

$$I_{72} = -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3})$$

$$I_{73} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{a_3}$$

$$I_{74} = 0$$

$$I_{75} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3}$$

$$I_{76} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3}$$

$$I_{77} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + I_{R_{a_3}}$$

$$I_{78} = I_{79} = I_{7,10} = I_{81} = I_{82} = I_{83} = I_{84} = I_{85} = I_{86} = I_{87} = 0$$

$$I_{88} = I_{T_1}$$

$$I_{89} = I_{8,10} = I_{91} = I_{92} = I_{93} = I_{94} = I_{95} = I_{96} = I_{97} = I_{98} = 0$$

$$I_{99} = I_{T_2}$$

$$I_{9,10} = I_{10,1} = I_{10,2} = I_{10,3} = I_{10,4} = I_{10,5} = I_{10,6} = I_{10,7} = I_{10,8} = I_{10,9} = 0$$

$$I_{10,10} = I_{T_3} + I_{T_c}$$

Elementos da matriz dos coeficientes de atrito C :

$$C_{11} = C_M$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{17} = C_{18} = C_{19} = C_{1,10} = C_{2,1} = 0$$

$$C_{22} = C_{e_1} + C_{e_2}$$

$$C_{23} = -C_{e_2}$$

$$C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{27} = C_{28} = C_{29} = C_{2,10} = C_{3,1} = 0$$

$$C_{32} = C_{23}$$

$$C_{33} = C_{e_2} + C_{e_3}$$

$$C_{34} = -C_{e_3}$$

$$C_{35} = C_{36} = C_{37} = C_{38} = C_{39} = C_{3,10} = C_{41} = C_{42} = 0$$

$$C_{43} = C_{34}$$

$$C_{44} = C_{e_3}$$

$$C_{45} = C_{46} = C_{47} = C_{48} = C_{49} = C_{4,10} = C_{51} = C_{52} = C_{53} = C_{54} = 0$$

$$C_{55} = C_{a_1} + C_{a_2}$$

$$C_{56} = -C_{a_2}$$

$$C_{57} = C_{58} = C_{59} = C_{5,10} = C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = 0$$

$$C_{65} = C_{56}$$

$$C_{66} = C_{a_2} + C_{a_3}$$

$$C_{67} = -C_{a_3}$$

$$C_{68} = C_{69} = C_{6,10} = C_{71} = C_{72} = C_{73} = C_{74} = C_{75} = 0$$

$$C_{76} = C_{67}$$

$$C_{77} = C_{a_3}$$

$$C_{78} = C_{79} = C_{7,10} = C_{81} = C_{82} = C_{83} = C_{84} = C_{85} = C_{86} = C_{87} = 0$$

$$C_{88} = C_{T_1} + C_{T_2}$$

$$C_{89} = -C_{T_2}$$

$$C_{8,10} = C_{91} = C_{92} = C_{93} = C_{94} = C_{95} = C_{96} = C_{97} = 0$$

$$C_{98} = C_{89}$$

$$C_{99} = C_T + C_{T_3}$$

$$C_{9,10} = -C_{T_3}$$

$$C_{10,1} = C_{10,2} = C_{10,3} = C_{10,4} = C_{10,5} = C_{10,6} = C_{10,7} = C_{10,8} = 0$$

$$C_{10,9} = C_{9,10}$$

$$C_{10,10} = C_{T_3}$$

Elementos da matriz dos coeficientes de atrito K :

$$K_{11} = K_M$$

$$K_{12} = K_{13} = K_{14} = K_{15} = K_{16} = K_{17} = K_{18} = K_{19} = K_{1,10} = K_{2,1} = 0$$

$$K_{22} = K_{e_1} + K_{e_2}$$

$$K_{23} = -K_{e_2}$$

$$K_{24} = K_{25} = K_{26} = K_{27} = K_{28} = K_{29} = K_{2,10} = K_{3,1} = 0$$

$$K_{32} = K_{23}$$

$$K_{33} = K_{e_2} + K_{e_3}$$

$$K_{34} = -K_{e_3}$$

$$K_{35} = K_{36} = K_{37} = K_{38} = K_{39} = K_{3,10} = K_{41} = K_{42} = 0$$

$$K_{43} = K_{34}$$

$$K_{44} = K_{e_3}$$

$$K_{45} = K_{46} = K_{47} = K_{48} = K_{49} = K_{4,10} = K_{51} = K_{52} = K_{53} = K_{54} = 0$$

$$K_{55} = K_{a_1} + K_{a_2}$$

$$K_{56} = -K_{a_2}$$

$$K_{57} = K_{58} = K_{59} = K_{5,10} = K_{61} = K_{62} = K_{63} = K_{64} = 0$$

$$K_{65} = K_{56}$$

$$K_{66} = K_{a_2} + K_{a_3}$$

$$K_{67} = -K_{a_3}$$

$$K_{68} = K_{69} = K_{6,10} = K_{71} = K_{72} = K_{73} = K_{74} = K_{75} = 0$$

$$K_{76} = K_{67}$$

$$K_{77} = K_{a_3}$$

$$K_{78} = K_{79} = K_{7,10} = K_{81} = K_{82} = K_{83} = K_{84} = K_{85} = K_{86} = K_{87} = 0$$

$$K_{88} = K_{T_1} + K_{T_2}$$

$$K_{89} = -K_{T_2}$$

$$K_{8,10} = K_{91} = K_{92} = K_{93} = K_{94} = K_{95} = K_{96} = K_{97} = 0$$

$$K_{98} = K_{89}$$

$$K_{99} = K_{T_2} + K_{T_3}$$

$$K_{9,10} = -K_{T_3}$$

$$K_{10,1} = K_{10,2} = K_{10,3} = K_{10,4} = K_{10,5} = K_{10,6} = K_{10,7} = K_{10,8} = 0$$

$$K_{10,9} = K_{9,10}$$

$$K_{10,10} = K_{T_3}$$

Componentes do vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos \vec{F} :

$$f_1 = -\left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 3m_3 + 3m_c\right)l_1 \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1}^2 - (m_2 + 3m_3 + 3m_c)l_2 \cos \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2}^2 + \\ -\left(\frac{3m_3}{2} + 3m_c\right)l_3 \cos \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_3}^2$$

$$\begin{aligned}
 & -2l_1l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \left[\cos \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2}^2 \right\} + \\
 f_2 = & -2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \left[\cos \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_1} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2} \right) \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_3}^2 \right\} - l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2l_1l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \left[-\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{e_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{a_2} \left(\frac{\dot{\theta}_{e_1}^2 + \dot{\theta}_{a_1}^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_1}^2 \right\} + \\
 f_3 = & -2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \left[\cos \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2} \right) \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_3}^2 \right\} - 2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_3} \left[-\cos \theta_{e_1} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_1} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \left(\frac{\dot{\theta}_{e_1}^2 + \dot{\theta}_{a_1}^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_1}^2 \right\} + \\
 f_4 = & -2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_3} \left[-\cos \theta_{e_2} \sin \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_3} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_2}^2 \right\} + \\
 & -2l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{e_3} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_5 = & 2l_1l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \left. - \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_2}^2 - \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \left. - \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2 - \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right\} + \\
 & + 2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \left. - \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2 - \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right) \right\} + \\
 & + 2l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \\
 & + 2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \\
 & + 2l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_6 = & 2l_1l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \left(\frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \left(\frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right\} + \\
 & + 2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \left. - \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} \left[(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2 - \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right] \right\} + \\
 & + 2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \\
 & + 2l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
& \quad \left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \left(\frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
f_7 = & +2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
& \quad \left. + \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right) \right] + \\
& +2l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3}
\end{aligned}$$

$$f_8 = f_9 = f_{10} = 0$$

Componentes do vetor de esforços gravitacionais \vec{G} :

$$g_1 = -(m_1 + m_2 + m_3)g$$

$$g_2 = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) l_1 g \sin \theta_{e_1}$$

$$g_3 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_2 g \sin \theta_{e_2}$$

$$g_4 = \frac{m_3}{2} l_3 g \sin \theta_{e_3}$$

$$g_5 = g_6 = g_7 = g_8 = g_9 = g_{10} = 0$$

Componentes do vetor de esforços externos \vec{T} :

$$T_1 = u(t)$$

$$T_2 = \tau_{e_1}$$

$$T_3 = \tau_{e_2}$$

$$T_4 = \tau_{e_3}$$

$$T_5 = \tau_{a_1}$$

$$T_6 = \tau_{a_2}$$

$$T_7 = \tau_{a_3}$$

$$T_8 = \tau_{T_1}$$

$$T_9 = \tau_{T_2}$$

$$T_{10} = \tau_{T_3}$$

APÊNDICE A.4

CABO DE QUATRO ELOS

Elementos da matriz de inércia I :

$$I_{11} = M + m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 + 16m_c$$

$$I_{12} = -l_1 \left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + 4m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1}$$

$$I_{13} = -l_2(m_2 + 3m_3 + 4m_4 + 4m_c) \text{sen } \theta_{e_2}$$

$$I_{14} = -l_3 \left(\frac{3m_3}{2} + 4m_4 + 4m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3}$$

$$I_{15} = -l_4(2m_4 + 4m_c) \text{sen } \theta_{e_4}$$

$$I_{16} = I_{17} = I_{18} = I_{19} = I_{1,10} = I_{1,11} = I_{1,12} = I_{1,13} = 0$$

$$I_{21} = -l_1 \left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + 4m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1}$$

$$I_{22} = l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) + I_{R_{e_1}}$$

$$I_{23} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) (\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2})$$

$$I_{24} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3}]$$

$$I_{25} = l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4}] +$$

$$-l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} +$$

$$I_{26} = -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) +$$

$$-l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$-l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} +$$

$$I_{27} = -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) +$$

$$-l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$I_{28} = -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) +$$

$$-l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$I_{29} = -l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$I_{2,10} = I_{2,11} = I_{2,12} = I_{2,13} = 0$$

$$I_{31} = -l_2(m_2 + 3m_3 + 4m_4 + 4m_c) \text{sen } \theta_{e_2}$$

$$I_{32} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) (\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2})$$

$$I_{33} = l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) + I_{R_{e_2}}$$

$$I_{34} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) (\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3})$$

$$I_{35} = l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) (\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_4})$$

$$l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} +$$

$$I_{36} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} +$$

$$-l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$-l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} +$$

$$I_{37} = -l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$-l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} +$$

$$I_{38} = -l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$I_{39} = -l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$I_{3,10} = I_{3,11} = I_{3,12} = I_{3,13} = 0$$

$$I_{41} = -l_3 \left(\frac{3m_3}{2} + 4m_4 + 4m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3}$$

$$I_{42} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3}]$$

$$I_{43} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) (\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3})$$

$$I_{44} = l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) + I_{R_{e_3}}$$

$$I_{45} = l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) (\cos \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} + \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4})$$

$$l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) +$$

$$I_{46} = +l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} +$$

$$-l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4}$$

$$I_{47} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} + \\ - l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4}$$

$$I_{48} = -l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4}$$

$$I_{49} = -l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4}$$

$$I_{4,10} = I_{4,11} = I_{4,12} = I_{4,13} = 0$$

$$I_{51} = -(2m_4 + 4m_c)l_4 \text{sen } \theta_{e_4}$$

$$I_{52} = l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) [\cos \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4}]$$

$$I_{53} = l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) (\cos \theta_{e_2} \cos \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_4})$$

$$I_{54} = l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) (\cos \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} + \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4})$$

$$I_{55} = l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) + I_{R_{e_4}}$$

$$l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\ I_{56} = + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\ + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4}$$

$$I_{57} = l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\ + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4}$$

$$I_{58} = l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4}$$

$$I_{59} = I_{5,10} = I_{5,11} = I_{5,12} = I_{5,13} = I_{61} = 0$$

$$-l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} + \\ I_{62} = -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\ -l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{a_2} + \\ I_{63} = -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} + \\ -l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$\begin{aligned}
 & l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\
 I_{64} = & + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{a_3} + \\
 & - l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4} \\
 & l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 I_{65} = & + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \text{sen } \theta_{a_4} \\
 & l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_1} + l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + \\
 & + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + \\
 & + 2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \\
 I_{66} = & + 2l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\
 & + 2l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \\
 & + 2l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} + I_{R_{a_1}} \\
 & l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + \\
 & + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \\
 & + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\
 I_{67} = & + l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_1} \text{sen } \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \\
 & + 2l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_2} \text{sen } \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + 2l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen } \theta_{e_3} \text{sen } \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{68} = & l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + \\
 & + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\
 & + l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} \\
 & + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + 2l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} \\
 I_{69} = & l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} \\
 I_{6,10} = I_{6,11} = I_{6,12} = I_{6,13} = I_{71} = & 0 \\
 I_{72} = & -l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{a_2} + \\
 & -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\
 & -l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \\
 I_{73} = & -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{a_3} + \\
 & -l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \\
 I_{74} = & l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{a_3} + \\
 & -l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \text{sen} \theta_{a_4} \\
 I_{75} = & l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \text{sen} \theta_{a_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + \\
 & + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} + \\
 & \quad + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\
 I_{76} = & \quad + l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & \quad + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} + \\
 & \quad + 2l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & \quad + 2l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_2} + l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + \\
 & + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + 2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} \\
 I_{77} = & \quad + 2l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & \quad + 2l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} + I_{R_{a_2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + \\
 & \quad + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} \\
 I_{78} = & \quad + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & \quad + 2l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 I_{79} = & \quad + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}
 \end{aligned}$$

$$I_{7,10} = I_{7,11} = I_{7,12} = I_{7,13} = I_{81} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & -l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\
 I_{82} = & \quad + l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{a_3} + \\
 I_{83} = & \quad -l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4})
 \end{aligned}$$

$$I_{84} = -l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \text{sen} \theta_{a_4}$$

$$I_{85} = l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \text{sen} \theta_{a_4}$$

$$\begin{aligned}
 I_{86} = & l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + \\
 & + l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) + \\
 & + l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} \\
 & + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + 2l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{87} = & l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + \\
 & + l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} \\
 & + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + 2l_3 l_4 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{88} = & l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_3} + l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + \\
 & + 2l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} + I_{Ra_3}
 \end{aligned}$$

$$I_{89} = l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}$$

$$I_{8,10} = I_{8,11} = I_{8,12} = I_{8,13} = I_{91} = 0$$

$$I_{92} = -l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$I_{93} = -l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \text{sen}(\theta_{a_3} + \theta_{a_4})$$

$$I_{94} = -l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \cos \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \text{sen} \theta_{a_4}$$

$$I_{95} = 0$$

$$\begin{aligned}
 I_{96} = & l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_1} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{97} = & l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_2} \text{sen} \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) + \\
 & + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}
 \end{aligned}$$

$$I_{98} = l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen} \theta_{e_3} \text{sen} \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4}$$

$$I_{99} = l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \text{sen}^2 \theta_{e_4} + I_{R_{a_4}}$$

$$I_{9,10} = I_{9,11} = I_{9,12} = I_{9,13} = I_{10,1} = I_{10,2} = I_{10,3} = I_{10,4} = I_{10,5} = I_{10,6} = I_{10,7} = \\ = I_{10,8} = I_{10,9} = 0$$

$$I_{10,10} = I_{T_1}$$

$$I_{10,11} = I_{10,12} = I_{10,13} = I_{11,1} = I_{11,2} = I_{11,3} = I_{11,4} = I_{11,5} = I_{11,6} = I_{11,7} = I_{11,8} = \\ = I_{11,9} = I_{11,10} = 0$$

$$I_{11,11} = I_{T_2}$$

$$I_{11,12} = I_{11,13} = I_{12,1} = I_{12,2} = I_{12,3} = I_{12,4} = I_{12,5} = I_{12,6} = I_{12,7} = I_{12,8} = I_{12,9} = \\ = I_{12,10} = I_{12,11} = 0$$

$$I_{12,12} = I_{T_3}$$

$$I_{12,13} = I_{13,1} = I_{13,2} = I_{13,3} = I_{13,4} = I_{13,5} = I_{13,6} = I_{13,7} = I_{13,8} = I_{13,9} = I_{13,10} = \\ = I_{13,11} = I_{13,12} = 0$$

$$I_{13,13} = I_{T_4} + I_{T_c}$$

Elementos da matriz dos coeficientes de atrito C :

$$C_{11} = C_M$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{17} = C_{18} = C_{19} = C_{1,10} = C_{1,11} = C_{1,12} = C_{1,13} = \\ = C_{2,1} = 0$$

$$C_{22} = C_{e_1} + C_{e_2}$$

$$C_{23} = -C_{e_2}$$

$$C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{27} = C_{28} = C_{29} = C_{2,10} = C_{2,11} = C_{2,12} = C_{2,13} = C_{31} = 0$$

$$C_{32} = C_{23}$$

$$C_{33} = C_{e_2} + C_{e_3}$$

$$C_{34} = -C_{e_3}$$

$$C_{35} = C_{36} = C_{37} = C_{38} = C_{39} = C_{3,10} = C_{3,11} = C_{3,12} = C_{3,13} = C_{41} = C_{42} = 0$$

$$C_{43} = C_{34}$$

$$C_{44} = C_{e_3} + C_{e_4}$$

$$C_{45} = -C_{e_4}$$

$$C_{46} = C_{47} = C_{48} = C_{49} = C_{4,10} = C_{4,11} = C_{4,12} = C_{4,13} = C_{51} = C_{52} = C_{53} = 0$$

$$C_{54} = C_{45}$$

$$C_{55} = C_{e_4}$$

$$C_{56} = C_{57} = C_{58} = C_{59} = C_{5,10} = C_{5,11} = C_{5,12} = C_{5,13} = C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = \\ = C_{65} = 0$$

$$C_{66} = C_{a_1} + C_{a_2}$$

$$C_{67} = -C_{a_2}$$

$$C_{68} = C_{69} = C_{6,10} = C_{6,11} = C_{6,12} = C_{6,13} = C_{71} = C_{72} = C_{73} = C_{74} = C_{75} = 0$$

$$C_{76} = C_{67}$$

$$C_{77} = C_{a_2} + C_{a_3}$$

$$C_{78} = -C_{a_3}$$

$$C_{7,9} = C_{7,10} = C_{7,11} = C_{7,12} = C_{7,13} = C_{81} = C_{82} = C_{83} = C_{84} = C_{85} = C_{86} = 0$$

$$C_{87} = C_{78}$$

$$C_{88} = C_{a_3} + C_{a_4}$$

$$C_{89} = -C_{a_4}$$

$$C_{8,10} = C_{8,11} = C_{8,12} = C_{8,13} = C_{91} = C_{92} = C_{93} = C_{94} = C_{95} = C_{96} = C_{97} = 0$$

$$C_{98} = C_{89}$$

$$C_{99} = C_{a_4}$$

$$C_{9,10} = C_{9,11} = C_{9,12} = C_{9,13} = C_{10,1} = C_{10,2} = C_{10,3} = C_{10,4} = C_{10,5} = C_{10,6} = C_{10,7} = \\ = C_{10,8} = C_{10,9} = 0$$

$$C_{10,10} = C_{T_1} + C_{T_2}$$

$$C_{10,11} = -C_{T_2}$$

$$C_{10,12} = C_{10,13} = C_{11,1} = C_{11,2} = C_{11,3} = C_{11,4} = C_{11,5} = C_{11,6} = C_{11,7} = C_{11,8} = C_{11,9} = 0$$

$$C_{11,10} = C_{10,11}$$

$$C_{11,11} = C_{T_2} + C_{T_3}$$

$$C_{11,12} = -C_{T_3}$$

$$C_{11,13} = C_{12,1} = C_{12,2} = C_{12,3} = C_{12,4} = C_{12,5} = C_{12,6} = C_{12,7} = C_{12,8} = C_{12,9} = C_{12,10} = 0$$

$$C_{12,11} = C_{11,12}$$

$$C_{12,12} = C_{T_3} + C_{T_4}$$

$$C_{12,13} = -C_{T_4}$$

$$C_{13,1} = C_{13,2} = C_{13,3} = C_{13,4} = C_{13,5} = C_{13,6} = C_{13,7} = C_{13,8} = C_{13,9} = C_{13,10} = C_{13,11} = 0$$

$$C_{13,12} = C_{12,13}$$

$$C_{13,13} = C_{T_4}$$

Elementos da matriz dos coeficientes de atrito K :

$$K_{11} = K_M$$

$$K_{12} = K_{13} = K_{14} = K_{15} = K_{16} = K_{17} = K_{18} = K_{19} = K_{1,10} = K_{1,11} = K_{1,12} = K_{1,13} = \\ = K_{2,1} = 0$$

$$K_{22} = K_{e_1} + K_{e_2}$$

$$K_{23} = -K_{e_2}$$

$$K_{24} = K_{25} = K_{26} = K_{27} = K_{28} = K_{29} = K_{2,10} = K_{2,11} = K_{2,12} = K_{2,13} = K_{31} = 0$$

$$K_{32} = K_{23}$$

$$K_{33} = K_{e_2} + K_{e_3}$$

$$K_{34} = -K_{e_3}$$

$$K_{35} = K_{36} = K_{37} = K_{38} = K_{39} = K_{3,10} = K_{3,11} = K_{3,12} = K_{3,13} = K_{41} = K_{42} = 0$$

$$K_{43} = K_{34}$$

$$K_{44} = K_{e_3} + K_{e_4}$$

$$K_{45} = -K_{e_4}$$

$$K_{46} = K_{47} = K_{48} = K_{49} = K_{4,10} = K_{4,11} = K_{4,12} = K_{4,13} = K_{51} = K_{52} = K_{53} = 0$$

$$K_{54} = K_{45}$$

$$K_{55} = K_{e_4}$$

$$K_{56} = K_{57} = K_{58} = K_{59} = K_{5,10} = K_{5,11} = K_{5,12} = K_{5,13} = K_{61} = K_{62} = K_{63} = K_{64} = \\ = K_{65} = 0$$

$$K_{66} = K_{a_1} + K_{a_2}$$

$$K_{67} = -K_{a_2}$$

$$K_{68} = K_{69} = K_{6,10} = K_{6,11} = K_{6,12} = K_{6,13} = K_{71} = K_{72} = K_{73} = K_{74} = K_{75} = 0$$

$$K_{76} = K_{67}$$

$$K_{77} = K_{a_2} + K_{a_3}$$

$$K_{78} = -K_{a_3}$$

$$K_{7,9} = K_{7,10} = K_{7,11} = K_{7,12} = K_{7,13} = K_{81} = K_{82} = K_{83} = K_{84} = K_{85} = K_{86} = 0$$

$$K_{87} = K_{78}$$

$$K_{88} = K_{a_3} + K_{a_4}$$

$$K_{89} = -K_{a_4}$$

$$K_{8,10} = K_{8,11} = K_{8,12} = K_{8,13} = K_{91} = K_{92} = K_{93} = K_{94} = K_{95} = K_{96} = K_{97} = 0$$

$$K_{98} = K_{89}$$

$$K_{99} = K_{a_4}$$

$$K_{9,10} = K_{9,11} = K_{9,12} = K_{9,13} = K_{10,1} = K_{10,2} = K_{10,3} = K_{10,4} = K_{10,5} = K_{10,6} = K_{10,7} = \\ = K_{10,8} = K_{10,9} = 0$$

$$K_{10,10} = K_{T_1} + K_{T_2}$$

$$K_{10,11} = -K_{T_2}$$

$$K_{10,12} = K_{10,13} = K_{11,1} = K_{11,2} = K_{11,3} = K_{11,4} = K_{11,5} = K_{11,6} = K_{11,7} = K_{11,8} = \\ = K_{11,9} = 0$$

$$K_{11,10} = K_{10,11}$$

$$K_{11,11} = K_{T_2} + K_{T_3}$$

$$K_{11,12} = -K_{T_3}$$

$$K_{11,13} = K_{12,1} = K_{12,2} = K_{12,3} = K_{12,4} = K_{12,5} = K_{12,6} = K_{12,7} = K_{12,8} = K_{12,9} = \\ = K_{12,10} = 0$$

$$K_{12,11} = K_{11,12}$$

$$K_{12,12} = K_{T_3} + K_{T_4}$$

$$K_{12,13} = -K_{T_4}$$

$$K_{13,1} = K_{13,2} = K_{13,3} = K_{13,4} = K_{13,5} = K_{13,6} = K_{13,7} = K_{13,8} = K_{13,9} = K_{13,10} = \\ = K_{13,11} = 0$$

$$K_{13,12} = K_{12,13}$$

$$K_{13,13} = K_{T_4}$$

Componentes do vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos \vec{F} :

$$\begin{aligned}
 f_1 = & -\left(\frac{m_1}{2} + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + 4m_c\right) l_1 \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1}^2 + \\
 & -(m_2 + 3m_3 + 4m_4 + 4m_c) l_2 \cos \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2}^2 + \\
 & -\left(\frac{3m_3}{2} + 4m_4 + 3m_c\right) l_3 \cos \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_3}^2 - (2m_4 + 4m_c) l_4 \cos \theta_{e_4} \dot{\theta}_{e_4}^2 \\
 \\
 f_2 = & -2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \left[\cos \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_2}^2 \right\} + \\
 & -2l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \left[\cos \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2} \right) \right] \right\} + \\
 & -\frac{1}{2} \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_3}^2 \left. \right\} + \\
 & -2l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \left[\cos \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_3} \dot{\theta}_{a_4} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{a_4}^2 + \dot{\theta}_{e_4}^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \dot{\theta}_{e_4}^2 \right\} \\
 & -l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{a_1}^2 \\
 \\
 f_3 = & -2l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \left[-\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{a_2} \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{e_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{a_2} \left(\frac{\dot{\theta}_{e_1}^2 + \dot{\theta}_{a_1}^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \dot{\theta}_{e_1}^2 \right\} + \\
 & -2l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \left[\cos \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2} \right) \right] \right\} + \\
 & -\frac{1}{2} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \dot{\theta}_{e_3}^2 \left. \right\} \\
 & -2l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \left[\cos \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_3} \dot{\theta}_{a_4} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2 + \dot{\theta}_{e_4}^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_4} \dot{\theta}_{e_4}^2 \right\} + \\
 & -2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_4 + m_3 + m_c\right) \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_4 = & -2l_1l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)\left\{\cos\theta_{e_3}\left[-\cos\theta_{e_1}\sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3})\dot{\theta}_{e_1}\dot{\theta}_{a_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin\theta_{e_1}\cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3})\left(\frac{\dot{\theta}_{e_1}^2 + \dot{\theta}_{a_1}^2}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{e_1}\sin\theta_{e_3}\dot{\theta}_{e_1}^2\right\} + \\
 & -2l_2l_3\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)\left\{\cos\theta_{e_3}\left[-\cos\theta_{e_2}\sin\theta_{a_3}(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})\dot{\theta}_{e_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin\theta_{e_2}\cos\theta_{a_3}\left(\dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{e_2}\sin\theta_{e_3}\dot{\theta}_{e_2}^2\right\} + \\
 & -2l_3l_4\left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)\left\{\cos\theta_{e_3}\left[-\cos\theta_{e_3}\sin\theta_{a_4}(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})\dot{\theta}_{e_4} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin\theta_{e_3}\cos\theta_{a_4}\left(\dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2}\dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2}\right)\right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2}\cos\theta_{e_3}\sin\theta_{e_4}\dot{\theta}_{e_3}^2\right\} \\
 & -2l_3^2\left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right)\sin\theta_{e_3}\cos\theta_{e_3}\left(\dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2}\dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2}{2}\right) \\
 \\
 & -2l_1l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{e_4}\left[-\cos\theta_{e_1}\sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})\dot{\theta}_{e_1}\dot{\theta}_{a_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin\theta_{e_1}\cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4})\left(\frac{\dot{\theta}_{e_1}^2 + \dot{\theta}_{a_1}^2}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{e_1}\sin\theta_{e_4}\dot{\theta}_{e_4}^2\right\} + \\
 & -2l_2l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{e_4}\left[-\cos\theta_{e_2}\sin(\theta_{a_3} + \theta_{a_4})(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2})\dot{\theta}_{e_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin\theta_{e_2}\cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4})\left(\dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\cos\theta_{e_2}\sin\theta_{e_4}\dot{\theta}_{e_2}^2\right\} + \\
 f_5 = & -2l_3l_4\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)\left\{\cos\theta_{e_4}\left[-\cos\theta_{e_3}\sin\theta_{a_4}(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3})\dot{\theta}_{e_4} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin\theta_{e_3}\cos\theta_{a_4}\left(\dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2}\dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2}\right)\right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2}\cos\theta_{e_3}\sin\theta_{e_4}\dot{\theta}_{e_3}^2\right\} + \\
 & -2l_4^2\left(\frac{m_4}{4} + m_c\right)\sin\theta_{e_4}\cos\theta_{e_4}\left(\dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_1}\dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_2}\dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2}\dot{\theta}_{a_4} + \right. \\
 & \left. + \dot{\theta}_{a_3}\dot{\theta}_{a_4} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2l_1l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \quad \left. - \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{a_2} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_2}^2 - \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \quad \left. - \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2 - \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right\} + \\
 & + 2l_1l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4} + \right. \\
 & \quad \left. - \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \right. \\
 & \quad \left. + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_3} \dot{\theta}_{a_4} + \frac{\dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{a_4}^2 + \dot{\theta}_{e_4}^2 - \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right\} + \\
 & + 2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 f_6 = & \quad \left. - \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2 - \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right) \right\} + \\
 & + 2l_2l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \quad \left. - \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_4} + \right. \\
 & \quad \left. + \dot{\theta}_{a_3} \dot{\theta}_{a_4} + \frac{\dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{a_4}^2 + \dot{\theta}_{e_4}^2 - \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right) \right\} + \\
 & + 2l_3l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4} + \right. \\
 & \quad \left. - \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{e_4} \sin \theta_{a_4} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_3} \dot{\theta}_{a_4} + \frac{\dot{\theta}_{a_4}^2 + \dot{\theta}_{e_4}^2 - \dot{\theta}_{e_3}^2}{2} \right) \right\} + \\
 & + 2l_1^2 \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) \sin \theta_{e_1} \cos \theta_{e_1} \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \\
 & + 2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \\
 & + 2l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \\
 & + 2l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_4} \cos \theta_{e_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2l_1l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{a_2} \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{a_2} \left(\frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \left(\frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_1l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \left(\frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
 f_7 = & + 2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \quad \left. - \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} \left[(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2 - \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right] \right\} + \\
 & + 2l_2l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4} + \right. \\
 & \quad \left. - \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \left[(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{a_3} + (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. + \frac{\dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{a_4}^2 + \dot{\theta}_{e_4}^2 - \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right] \right\} + \\
 & + 2l_3l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left\{ \cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4} + \right. \\
 & \quad \left. - \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{e_4} \sin \theta_{a_4} \left[(\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{a_3} + (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{a_4} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. + \frac{\dot{\theta}_{a_4}^2 + \dot{\theta}_{e_4}^2 - \dot{\theta}_{e_3}^2}{2} \right] \right\} + \\
 & + 2l_2^2 \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) \sin \theta_{e_2} \cos \theta_{e_2} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \\
 & + 2l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \\
 & + 2l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_4} \cos \theta_{e_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_8 = & 2l_1l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_3} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3}) \left(\frac{\dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_1l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \left(\frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_2l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{a_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{a_3} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_2l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_3l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_3} \sin \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{e_4} \sin \theta_{a_4} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2} \right) \right] + \\
 & - 2l_3^2 \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) \sin \theta_{e_3} \cos \theta_{e_3} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \\
 & + 2l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_4} \cos \theta_{e_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_9 = & 2l_1l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_1} \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \dot{\theta}_{e_1} \dot{\theta}_{a_1} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_1} \sin \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_2} + \theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \left(\frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{e_1}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_2l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \cos(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2}) \dot{\theta}_{e_2} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_2} \sin \theta_{e_4} \sin(\theta_{a_3} + \theta_{a_4}) \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{e_2}^2}{2} \right) \right] + \\
 & + 2l_3l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \left[\cos \theta_{e_3} \sin \theta_{e_4} \cos \theta_{a_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3}) \dot{\theta}_{e_3} + \right. \\
 & \left. + \sin \theta_{e_3} \sin \theta_{e_4} \sin \theta_{a_4} \left(\dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_1} \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_2} \dot{\theta}_{a_3} + \frac{\dot{\theta}_{a_1}^2 + \dot{\theta}_{a_2}^2 + \dot{\theta}_{a_3}^2 + \dot{\theta}_{e_3}^2}{2} \right) \right] + \\
 & - 2l_4^2 \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \sin \theta_{e_4} \cos \theta_{e_4} (\dot{\theta}_{a_1} + \dot{\theta}_{a_2} + \dot{\theta}_{a_3} + \dot{\theta}_{a_4}) \dot{\theta}_{e_4}
 \end{aligned}$$

$$f_{10} = f_{11} = f_{12} = f_{13} = 0$$

Componentes do vetor de esforços gravitacionais \vec{G} :

$$g_1 = -(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)g$$

$$g_2 = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4\right) l_1 g \operatorname{sen} \theta_{e_1}$$

$$g_3 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4\right) l_2 g \operatorname{sen} \theta_{e_2}$$

$$g_4 = \left(\frac{m_3}{2} + m_4\right) l_3 g \operatorname{sen} \theta_{e_3}$$

$$g_5 = \frac{m_4}{2} l_4 g \operatorname{sen} \theta_{e_4}$$

$$g_6 = g_7 = g_8 = g_9 = g_{10} = g_{11} = g_{12} = g_{13} = 0$$

Componentes do vetor de esforços externos \vec{T} :

$$T_1 = u(t)$$

$$T_2 = \tau_{e_1}$$

$$T_3 = \tau_{e_2}$$

$$T_4 = \tau_{e_3}$$

$$T_5 = \tau_{e_4}$$

$$T_6 = \tau_{a_1}$$

$$T_7 = \tau_{a_2}$$

$$T_8 = \tau_{a_3}$$

$$T_9 = \tau_{a_4}$$

$$T_{10} = \tau_{T_1}$$

$$T_{11} = \tau_{T_2}$$

$$T_{12} = \tau_{T_3}$$

$$T_{13} = \tau_{T_4}$$

APÊNDICE B

Elementos dos vetores dos torques externos

APÊNDICE B.1

CABO DIVIDIDO EM CINCO ELOS PARA A FORÇA NA CARGA TERMINAL

Elementos do vetor de torques externos \vec{T} , para o cabo com cinco elos:

$$T_{m_1} = T_{\theta_{e_1}} + \tau_{e_1}$$

$$T_{m_2} = T_{\theta_{e_2}} + \tau_{e_2}$$

$$T_{m_3} = T_{\theta_{e_3}} + \tau_{e_3}$$

$$T_{m_4} = T_{\theta_{e_4}} + \tau_{e_4}$$

$$T_{m_5} = T_{\theta_{e_5}} + \tau_{e_5}$$

$$T_{m_6} = T_{\theta_{a_1}} + \tau_{a_1}$$

$$T_{m_7} = T_{\theta_{a_2}} + \tau_{a_2}$$

$$T_{m_8} = T_{\theta_{a_3}} + \tau_{a_3}$$

$$T_{m_9} = T_{\theta_{a_4}} + \tau_{a_4}$$

$$T_{m_{10}} = T_{\theta_{a_5}} + \tau_{a_5}$$

$$T_{m_{11}} = T_{\theta_{T_1}} + \tau_{T_1}$$

$$T_{m_{12}} = T_{\theta_{T_2}} + \tau_{T_2}$$

$$T_{m_{13}} = T_{\theta_{T_3}} + \tau_{T_3}$$

$$T_{m_{14}} = T_{\theta_{T_4}} + \tau_{T_4}$$

$$T_{m_{15}} = T_{\theta_{T_5}} + \tau_{T_5}$$

APÊNDICE B.2

CABO DIVIDIDO EM UM E TRÊS ELOS PARA A FORÇA E TORQUES NA CARGA TERMINAL

Elementos do vetor de torques externos \vec{T} para o cabo com um elo:

$$T_{m_1} = T_{\theta_{e_1}} + \tau_{e_1} + \tau_{ec}$$

$$T_{m_2} = T_{\theta_{a_1}} + \tau_{a_1} + \tau_{ac}$$

$$T_{m_3} = T_{\theta_{T_1}} + \tau_{T_1} + \tau_{Tn}$$

Elementos do vetor de torques externos \vec{T} para o cabo com três elos:

$$T_{m_1} = T_{\theta_{e_1}} + \tau_{e_1}$$

$$T_{m_2} = T_{\theta_{e_2}} + \tau_{e_2}$$

$$T_{m_3} = T_{\theta_{e_3}} + \tau_{e_3} + \tau_{ec}$$

$$T_{m_4} = T_{\theta_{a_1}} + \tau_{a_1}$$

$$T_{m_5} = T_{\theta_{a_2}} + \tau_{a_2}$$

$$T_{m_6} = T_{\theta_{a_3}} + \tau_{a_3} + \tau_{ac}$$

$$T_{m_7} = T_{\theta_{T_1}} + \tau_{T_1}$$

$$T_{m_8} = T_{\theta_{T_2}} + \tau_{T_2}$$

$$T_{m_9} = T_{\theta_{T_3}} + \tau_{T_3} + \tau_{Tn}$$

$T_{\theta_{e_i}}$, $T_{\theta_{a_i}}$ e $T_{\theta_{T_i}}$ são os torques de elevação, azimute e torção, oriundos da própria dinâmica do cabo e de esforços na carga terminal, τ_{ec} e τ_{ac} são torques de elevação e azimute na última articulação provocados pela carga terminal, enquanto que τ_{e_i} , τ_{a_i} e τ_{T_i} são torques oriundos de esforços externos tais como correntes oceânicas atuantes no cabo, para $i = 1, \dots, n$.