Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF

Edital 15 - CAPES

Matemática Básica
Para Ciências Sociais I

MATRIZES

Prof. Antônio Maurício Medeiros Alves
Profª Denise Maria Varella Martinez

UNIDADE 1 - MATRIZES

1. INTRODUÇÃO

Matrizes são tabelas de números reais utilizadas em quase todos os ramos das ciências, formadas por um grupo ordenado de números dispostos em linhas e colunas. São utilizadas na Estatística, na Economia, na Administração, na Física, na Matemática, na Engenharia, etc. Em muitas situações da economia, da física, ou de outro ramo da ciência, as idéias costumam ser expressas por um número grande de equações, as quais envolvem muitas variáveis. As matrizes constituem uma forma adequada de representá-las e de resolvê-las.

Vejamos um exemplo de matriz.

Considere a tabela abaixo que indica uma indústria do ramo farmacêutico que fabrica três tipos de remédios, sendo eles denominados pelos números I, II e III. As empresas A, B e C encomendam em lotes cada um desses remédios.

	Empresas		
Remédios	A	B	C
I	5	6	0
II	2	7	3
III	1	10	5

A quantidade de lotes de remédios solicitada pelas empresas em um determinado mês é expressa na tabela. Se quisermos saber a quantidade de lotes que a empresa C encomendou do remédio II, vamos procurar essa informação na segunda linha, da terceira coluna, onde obteremos o resultado de 3 lotes encomendados. A tabela representa uma ***matriz***, na qual os números dispostos na horizontal formam as **linhas** e os números dispostos na vertical formam as **colunas.** Cada um desses números representa um elemento da matriz.

Dessa forma, a matriz representada na tabela acima possui três linhas e três colunas e pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 10 & 5 \end{bmatrix}_{3x3} \Rightarrow$$ Onde se lê matriz de ordem 3x3

Para representar o elemento de uma matriz, usaremos uma letra minúscula com dois índices: o primeiro indicará a linha em que o número se encontra e o segundo indicará a coluna. Por exemplo, a_{23} é o elemento que se encontra na 2ª linha e na 3ª coluna, no caso, o número 3.

O elemento genérico de uma matriz será indicado por a_{ij}, em que **i** indicará a linha e **j** a coluna onde se encontra o elemento. Costuma-se representar o número de linhas de uma matriz pela letra **m** e o número de colunas por **n**. Os valores de **m** e de **n** são as dimensões da matriz. Ou seja, podemos dizer que a matriz tem ordem **m** x **n** ou é uma matriz do tipo **m** x **n**.

2. DEFINIÇÃO

> Denomina-se matriz a toda tabela retangular formada por **m** x **n** números reais, dipostos em m linhas e n colunas.

Uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, onde **m** é o número de linhas da matriz e **n** é o número de colunas.

Notação: Indicamos uma matriz A por $A = (a_{ij})_{mxn}$ ou $A = [a_{ij}]_{mxn}$ ou $A = \| a_{ij} \|_{mxn}$, com seus elementos entre parênteses, colchetes ou barras duplas.

3. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Sendo $A = [a_{ij}]_{mxn}$ uma matriz **m** por **n**, teremos:

m linhas (i)

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

n colunas (j)

4. TIPOS DE MATRIZES

4.1. Matriz Linha e Matriz Coluna

A matriz linha possui uma única linha (**m**=1) e a matriz coluna possui uma única coluna (**n**=1).

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{1x3} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}_{3x1}$$

4.2. Matriz Quadrada

Matriz quadrada é aquela em que o número de linhas é igual ao número de colunas (**m**=**n**). Podemos dizer que a ordem dessa matriz é **m** x **m** ou simplesmente **m**.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{2x2}$$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada de ordem m, os elementos a_{ij} onde $i = j$, ou seja, $a_{11}, a_{22}, a_{33} \cdots a_{mm}$, formam a ***diagonal principal***. Os elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$, formam a ***diagonal secundária*** da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 10 & 6 \\ 1 & 7 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária **Diagonal principal**

4.3. Matriz Nula e Matriz Diagonal

Quando todos os elementos da matriz são iguais a zero ela é chamada de matriz nula, ou seja, qualquer $a_{ij} = 0$. Na matriz diagonal, todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ matriz nula

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ matriz diagonal

4.4. Matriz Identidade

A matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os outros elementos são iguais a zero, é chamada matriz identidade. Logo, $a_{ij} = 1$, para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.5. Matriz Simétrica e Anti-Simétrica

Se os elementos em relação à diagonal principal forem simetricamente iguais dizemos que a matriz é simétrica (matriz A). Quando os elementos da diagonal principal forem nulos e os elementos dispostos em relação a ela forem opostos chamamos a matriz de anti-simétrica (matriz B).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 7 & 12 \\ 6 & 12 & 1 \end{bmatrix} \text{ matriz simétrica}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -10 \\ -4 & 10 & 0 \end{bmatrix} \text{ matriz anti-simétrica}$$

4.6. Igualdade de Matrizes

Duas matrizes são iguais quando têm a mesma ordem e os elementos de mesma posição (também chamados de elementos correspondentes) são iguais.

Sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2^2 & 3-2 \\ 1-4 & 5+1 \end{bmatrix}$, dizemos que as matrizes são iguais pois possuem a mesma ordem (matrizes quadradas de ordem 2) e os elementos correspondentes são iguais, logo $A = B$.

4.7. Matriz Oposta e Matriz Transposta

Dada uma matriz A_{mxn}, chamamos de matriz oposta aquela formada por elementos opostos aos da matriz A. A soma de uma matriz com sua oposta é igual a matriz nula.

Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, então sua matriz oposta será $-A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ +2 & -3 \end{bmatrix}$ pois:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ +2 & -3 \end{bmatrix}}_{-A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz nula}}$$

Sendo a matriz $A_{mxn,}$ chamamos de matriz transposta aquela obtida através da troca ordenada das linhas pelas colunas e a representaremos por A^t.

Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 7 & -3 & 10 \end{bmatrix}$ sua transposta será $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -3 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

- Observe que a primeira linha de A é a primeira coluna de A^t e a segunda linha de A é a segunda coluna de A^t.
- Quando a matriz for simétrica, teremos $A = A^t$:

Dada a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 11 \\ 3 & 5 & -8 \\ 11 & -8 & 10 \end{bmatrix}$ teremos $A^t = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 11 \\ 3 & 5 & -8 \\ 11 & -8 & 10 \end{bmatrix}$

5. OPERAÇÕES COM MATRIZES

5.1 Adição

A adição de matrizes se dá através da soma dos elementos correspondentes entre duas matrizes de mesma ordem.

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$, a soma $A + B$ é uma matriz C, tal que $C = \begin{bmatrix} 5-2 & -7+1 \\ 0+23 & 3+9 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 23 & 12 \end{bmatrix}$

5.2. Subtração de Matrizes

A diferença de duas matrizes A e B, de mesma ordem, se dá através da soma da matriz A com a oposta de B.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -2\end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix}7 & 11\\4 & 1\end{bmatrix}$$

$$A - B = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}7 & 11\\4 & 1\end{bmatrix}}_{A-B} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -2\end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix}-7 & -11\\-4 & -1\end{bmatrix}}_{-B\ (\text{oposta de } B)} = \begin{bmatrix}1-7 & 0-11\\3-4 & -2-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & -11\\-1 & -3\end{bmatrix}$$

5.3. Multiplicação de Matrizes

Multiplicação de um número real por uma matriz

Para se multiplicar um número real α por uma matriz A_{mxn}, multiplicamos esse número real α por cada elemento (aij) da matriz:

Sendo $A = \begin{bmatrix}4 & -9\\0 & 3\end{bmatrix}$ e $\alpha = 5$, $5.A = 5.\begin{bmatrix}4 & -9\\0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5.4 & 5.(-9)\\5.0 & 5.3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20 & -45\\0 & 15\end{bmatrix}$

Multiplicação de matrizes

Observe o exemplo:

Durante a primeira fase da Copa do Mundo de futebol, realizada no Japão e na Coréia do Sul em 2002, o grupo C era formado por quatro países: Brasil, Turquia, Costa Rica e China. Observe os resultados de cada um registrados em uma tabela e em uma matriz:

	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	3	1	0
Turquia	1	0	1
Costa Rica	1	1	2
China	0	0	3

Registrando os dados em uma matriz A_{4x3}, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pelo regulamento da Copa cada resultado tem pontuação correspondente a 3 pontos (vitória), 1 ponto (empate) e 0 ponto (derrota). Registrando os dados em uma matriz B_{3x1} temos:

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Terminada a primeira fase, foi verificado o total de pontos de cada país. Essa pontuação pode ser registrada numa matriz que é representada por A.B (produto de A por B). Vejamos como calcular a pontuação de cada país:

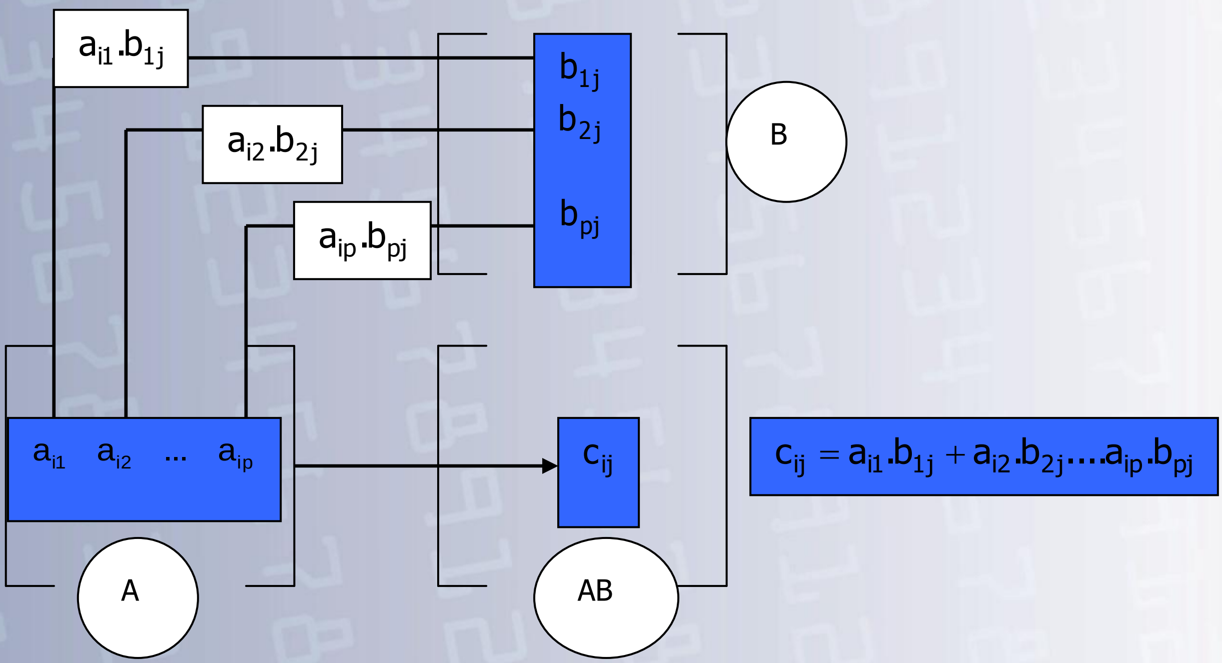
Brasil: 3.3+1.1+0.0=10
Turquia: 1.3+0.1+1.0=3
Costa Rica: 1.3+1.1+2.0=4
China: 0.3+1.1+3.0=1

Essa pontuação pode ser representada pela matriz $C = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtida pelo produto das matrizes A e B, assim calculado:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3+ & 1.1+ & 0.0 \\ 1.3+ & 0.1+ & 1.0 \\ 1.3+ & 1.1+ & 2.0 \\ 0.3+ & 1.1+ & 3.0 \end{bmatrix}$$

Então:

Sejam as matrizes $A_{m \times p}$ e $A_{p \times n}$ (observe que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B), com elementos genéricos a_{ik} e b_{kj}. Chama-se o produto da matriz A pela matriz B (indica-se o produto AB) a matriz do tipo m x n, cujo elemento genérico c_{ij} é dado por $c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + ... + a_{ip}.b_{pj}$. O elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se a linha i de A pela coluna j de B ordenadamente, elemento por elemento, somando-se os produtos em seguida.



Observação:

A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, pode ocorrer que $A.B \neq B.A$.

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, teremos o produto $A.B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1.0+3.2 & 1.1+3.5 \\ 7.0+0.2 & 7.1+0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6 & 1+15 \\ 0+0 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$ enquanto que

$$B.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1+1.7 & 0.3+1.0 \\ 2.1+5.7 & 2.3+5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+7 & 0+0 \\ 2+35 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 37 & 6 \end{bmatrix},$$ logo

$A \cdot B \neq B \cdot A$, ou seja, as matrizes A e B não comutam.

Porém pode haver uma situação em que A. B = B. A e nesse caso dizemos que as matrizes comutam:

Sejam A= $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$, e o produto A.B= $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$, assim

$$A.\ B = \begin{bmatrix} 2.12+4.9 & 2.4+4.10 \\ 9.12+0.9 & 9.4+0.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+36 & 8+40 \\ 108+0 & 36+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 48 \\ 108 & 36 \end{bmatrix}$$ enquanto que

$$B.A = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 12.2+4.9 & 12.4+4.0 \\ 9.2+10.9 & 9.4+10.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+36 & 48+0 \\ 18+90 & 36+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 48 \\ 108 & 36 \end{bmatrix}.$$