LabSAD

Laboratório de estudos e pesquisas em
Metodologias de Sistemas de Apoio à Decisão

Resolução de modelos de Programação Linear – casos especiais

Prof. Dr. André Andrade Longaray

INTRODUÇÃO

Os modelos de programação linear apresentados até agora têm as seguintes características:

- a função objetivo deve ser maximizada;

- todas as variáveis de decisão são não-negativas;

- apresentam uma solução básica inicial.

INTRODUÇÃO

Os modelos de programação linear apresentados até agora têm as seguintes características:

- a função objetivo deve ser maximizada;

- todas as variáveis de decisão são não-negativas;

- apresentam uma solução básica inicial.

mas, e se isso não ocorrer?

INTRODUÇÃO

...devemos procurar um modelo equivalente que possua essas 3 características, para então usar o SIMPLEX.

INTRODUÇÃO

PRINCIPAIS EXCESSÕES AO MODELO GERAL DA PL:

1. **PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL**
2. **PROBLEMA DA MINIMIZAÇÃO**
3. **PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE**

Prof. Dr. André Andrade Longaray
longaray@bol.com.br

INTRODUÇÃO

PASSAMOS, ENTÃO, A CADA UMA DELAS...

PRINCIPAIS EXCESSÕES AO MODELO GERAL DA PL:

1. PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

2. PROBLEMA DA MINIMIZAÇÃO

3. PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Nos modelos resolvidos até agora pelo SIMPLEX, as restrições foram todas do tipo "≤" com os termos da direita positivos. O acréscimo das variáveis de folga fornece neste caso uma solução básica inicial.

O problema aparece quando:

1º a restrição é do tipo "≥"

2º a restrição é do tipo "=“

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Seguindo a lógica aplicada até aqui, podemos deduzir que quando a restrição é do tipo "≥" devemos SUBTRAIR a variável de folga:

$$-XF_n$$

ISSO NOS CAUSA UM PROBLEMA, POIS QUANDO ZERARMOS AS VARIÁVEIS ORIGINAIS DO MODELO (não-básicas), TEREMOS UMA VARIÁVEL DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL COM **VALOR NEGATIVO!!!**

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Se a restrição é do tipo "=" **NÃO** teremos variável de folga, o que impede resolver o modelo via SIMPLEX.

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

PARA RESOLVER ESTES DOIS CASOS:

Vamos acrescentar em cada uma das restrições do tipo “≥” e “=“ variáveis auxiliares a_i com a formação de um novo modelo que atenda ao algoritmo SIMPLEX.

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

EXEMPLO:

$\text{Max } Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$

Sujeito a:

$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 \leq 10$

$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \geq 20$

$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 60$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

EXEMPLO:	**ACRESCENTANDO VARIÁVEIS DE FOLGA:**
$\text{Max } Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$	$\text{Max } Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$
Sujeito a:	Sujeito a:
$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 \leq 10$	$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + xF_1 = 10$
$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \geq 20$	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - xF_2 = 20$
$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 60$	$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 60$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$	$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

EXEMPLO:	**ACRESCENTANDO VARIÁVEIS DE FOLGA:**	**ACRESCENTANDO VARIÁVEIS AUXILIARES:**
Max $Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$	Max $Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$	Max $Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$
Sujeito a:	Sujeito a:	Sujeito a:
$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 \leq 10$	$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + xF_1 = 10$	$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + xF_1 = 10$
$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \geq 20$	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - xF_2 = 20$	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - xF_2 + a_2 = 20$
$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 60$	$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 60$	$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + a_3 = 60$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$	$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0;$ $xF_1 \geq 0; xF_2 \geq 0$	$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0;$ $xF1 \geq 0; xF2 \geq 0;$ $a_2 \geq 0; a_3 \geq 0$

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

EXEMPLO:	ACRESCENTANDO VARIÁVEIS DE FOLGA:	ACRESCENTANDO VARIÁVEIS AUXILIARES:
Max $Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$	Max $Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$	Max $Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$
Sujeito a:	Sujeito a:	Sujeito a:
$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 \leq 10$	$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + xF_1 = 10$	$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + xF_1 = 10$
$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \geq 20$	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - xF_2 = 20$	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - xF_2 + a_2 = 20$
$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 60$	$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 60$	$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + a_3 = 60$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$	$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0;$ $xF_1 \geq 0; xF_2 \geq 0$	$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0;$ $xF1 \geq 0; xF2 \geq 0;$ $a_2 \geq 0; a_3 \geq 0$

Teremos agora uma solução básica inicial: $xF_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 60$, com as outras variáveis todas nulas.

RETORNO AO MODELO ORIGINAL

O retorno ao modelo original deve ser feito com a eliminação das variáveis auxiliares e a manutenção da solução básica. Isto pode ser feito pelo **método do M grande**

MÉTODO DO "M" GRANDE

O método "Big M" consiste na colocação de coeficientes na função objetivo (c_j) para cada umas variáveis auxiliares (a_i).

Estes coeficientes serão **$-M_j$** para os problemas de **maximização** e **$+M_j$** para os problemas de **minimização**.

Este método ajuda o algoritmo a zerar as variáveis artificiais empurrando-as para fora da base.

MÉTODO DO "M" GRANDE

RETORNEMOS AO NOSSO EXEMPLO:

Max $Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3$

Sujeito a:

$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + xF_1 = 10$

$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - xF_2 + a_2 = 20$

$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + a_3 = 60$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0$
$xF1 \geq 0;\ xF2 \geq 0;$
$a2 \geq 0;\ a3 \geq 0$

Variáveis artificiais entram na função objetivo:

Max $Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + a_2 + a_3$

MÉTODO DO "M" GRANDE

$\text{Max } Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + a_2 + a_3$

Sujeito a:

$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + xF_1 = 10$

$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - xF_2 + a_2 = 20$

$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + a_3 = 60$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$
$xF1 \geq 0; xF2 \geq 0;$
$a2 \geq 0; a3 \geq 0$

Reescrevemos a função objetivo, acrescentando os coeficientes $-M_2$ e $-M_3$ às variáveis auxiliares a_2 e a_3, sendo M_2 e M_3 números que tendem ao $-\alpha$

$\text{Max } Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 - M_2a_2 - M_3a_3$

MÉTODO DO “M” GRANDE

À medida que Z é maximizada, as variáveis a_2 e a_3 deixam a base, devido ao grande valor de M_2 e M_3

MÉTODO DO “M” GRANDE

Assim que uma variável auxiliar deixa a base, ela é **eliminada do problema!!!**

MÉTODO DO “M” GRANDE

RETORNEMOS AO NOSSO EXEMPLO:

$$\text{Max } Z = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 - M_2a_2 - M_3a_3$$

Sujeito a:

$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + xF_1 = 10$

$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - xF_2 + a_2 = 20$

$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + a_3 = 60$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$
$xF1 \geq 0; xF2 \geq 0;$
$a2 \geq 0; a3 \geq 0$

VAMOS MONTAR O TABLEU SIMPLEX!

$$Z - 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + M_2a_2 + M_3a_3 = 0$$

Sujeito a:

$2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + xF_1 = 10$

$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 - xF_2 + a_2 = 20$

$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + a_3 = 60$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$
xF1 ≥ 0; xF2 ≥ 0;
a2 ≥ 0; a3 ≥ 0

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-1	-1	-1	0	0	M_2	M_3	0
0	2	1	-1	1	0	0	0	10
0	1	1	2	0	-1	1	0	20
0	2	1	3	0	0	0	1	60

Variáveis não-básicas:

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x3 = 0$

$xF_2 = 0$

Variáveis-básicas:

$xF_1 = 10$

$a_2 = 20$

$a_3 = 60$

Valor de Z:

$Z = 0$

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-1	-1	-1	0	0	M_2	M_3	0
0	2	1	-1	1	0	0	0	10
0	1	1	2	0	-1	1	0	20
0	2	1	3	0	0	0	1	60

Variável que entra: as três variáveis x_1, x_2 e x_3 têm coeficientes iguais. Escolhemos qualquer uma delas. Eu escolhi $\mathbf{x_3}$!

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b	
1	-1	-1	-1	0	0	M_2	M_3	0	
0	2	1	-1	1	0	0	0	10	$10 \div -1 = -10$
0	1	1	2	0	-1	1	0	20	$20 \div 2 = 10 \Rightarrow$ sai
0	2	1	3	0	0	0	1	60	$60 \div 3 = 20$

Variável que sai: **a_2**!

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-1	-1	-1	0	0	M_2	M_3	0
0	2	1	-1	1	0	0	0	10
0	1	1	2	0	-1	1	0	20
0	2	1	3	0	0	0	1	60

linha pivô: terceira linha (L_3)
elemento pivô: 2

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-1	-1	-1	0	0	M_2	M_3	0
0	2	1	-1	1	0	0	0	10
0	1	1	2	0	-1	1	0	20
0	2	1	3	0	0	0	1	60

LINHA PIVÔ:	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
÷ 2:	0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10

NOVA LINHA PIVÔ

	Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
L_1	1	-1	-1	-1	0	0	M_2	M_3	0
	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
	0	2	1	3	0	0	0	1	60

NOVA LINHA PIVÔ :	0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
x 1 :	0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
+ L_1 :	1	-1	-1	-1	0	0	M_2	M_3	0
Σ :	1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10

NOVA L_1

Prof. Dr. André Andrade Longaray
longaray@bol.com.br

	Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
	1	-1	-1	-1	0	0	M_2	M_3	0
L_2	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
	0	2	1	3	0	0	0	1	60

NOVA LINHA PIVÔ :	0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
x 1 :	0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
+ L_2 :	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
Σ :	0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20

NOVA L_2

Prof. Dr. André Andrade Longaray
longaray@bol.com.br

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-1	-1	-1	0	0	M_2	M_3	0
0	2	1	-1	1	0	0	0	10
0	1	1	2	0	-1	1	0	20
0	2	1	3	0	0	0	1	60

L_4

NOVA LINHA PIVÔ :	0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
x -3 :	0	-1,5	-1,5	-3	0	1,5	-1,5	0	-30
+ L_4 :	0	2	1	3	0	0	0	1	60
Σ :	0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30

NOVA L_4

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10
0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20
0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30

Variáveis não-básicas:

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$xF_2 = 0$
$a_2 = 0$

Variáveis-básicas:

$x_3 = 10$
$xF_1 = 20$
$a_3 = 30$

Valor de Z:

$Z = 10$

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10
0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20
0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30

Variável que entra: xF_2

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b	
1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10	
0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20	20 ÷ -0,5 = -40 ✗
0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10	10 ÷ -0,5 = -20 ✗
0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30	30 ÷ 1,5= 20 ⇒ sai

Variável que sai: **a_3**!

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10
0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20
0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30

linha pivô: quarta linha (L_4)
elemento pivô: 1,5

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10
0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20
0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30

LINHA PIVÔ:	0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30
÷1,5:	0	0,333	-0,333	0	0	1	-1	0,667	20

NOVA LINHA PIVÔ

L_1

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10
0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20
0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30

NOVA LINHA PIVÔ:	0	0,333	-0,333	0	0	1	-1	0,667	20
x 0,5 :	0	0,167	-0,167	0	0	0,5	-0,5	0,333	10
L_1 :	1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10
Σ :	1	-0,333	-0,667	0	0	0	M_2	M_3	20

NOVA L_1

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10
0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20
0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30

L_2

NOVA LINHA PIVÔ:	0	0,333	-0,333	0	0	1	-1	0,667	20
x 0,5 :	0	0,167	-0,167	0	0	0,5	-0,5	0,333	10
L_2 :	0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20
Σ :	0	2,667	1,333	0	1	0	0	0,333	30

NOVA L_2

	Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
	1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	M_2	M_3	10
	0	2,5	1,5	0	1	-0,5	0,5	0	20
L_3	0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
	0	0,5	-0,5	0	0	1,5	-1,5	1	30

NOVA LINHA PIVÔ:	0	0,333	-0,333	0	0	1	-1	0,667	20
x 0,5 :	0	0,167	-0,167	0	0	0,5	-0,5	0,333	10
L_3 :	0	0,5	0,5	1	0	-0,5	0,5	0	10
Σ :	0	0,667	0,333	0	0	0	0	0,333	20

NOVA L_3

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-0,333	-0,667	0	0	0	M_2	M_3	20
0	2,667	1,333	0	1	0	0	0,333	30
0	0,667	0,333	1	0	0	0	0,333	20
0	0,333	-0,333	0	0	1	-1	0,667	20

Variáveis não-básicas:

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$a_2 = 0$

$a_3 = 0$

Variáveis-básicas:

$x_3 = 20$

$xF_1 = 30$

$xF_2 = 20$

Valor de Z:

$Z = 20$

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	a_2	a_3	b
1	-0,333	-0,667	0	0	0	M_2	M_3	20
0	2,667	1,333	0	1	0	0	0,333	30
0	0,667	0,333	1	0	0	0	0,333	20
0	0,333	-0,333	0	0	1	-1	0,667	20

Variáveis não-básicas:
$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$a_2 = 0$
$a_3 = 0$

Variáveis-básicas:
$x_3 = 20$
$xF_1 = 30$
$xF_2 = 20$

Valor de Z:
$Z = 20$

A solução básica não é mais formada pelas variáveis auxiliares, todas nulas. Podemos abandoná-las, excluindo-as do quadro SIMPLEX.

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b
1	-0,333	-0,667	0	0	0	20
0	2,667	1,333	0	1	0	30
0	0,667	0,333	1	0	0	20
0	0,333	-0,333	0	0	1	20

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b
1	-0,333	-0,667	0	0	0	20
0	2,667	1,333	0	1	0	30
0	0,667	0,333	1	0	0	20
0	0,333	-0,333	0	0	1	20

Variável que entra: x_2

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b	
1	-0,333	-0,667	0	0	0	20	
0	2,667	1,333	0	1	0	30	30÷ 1,333= 22,5 $\Rightarrow$ sai
0	0,667	0,333	1	0	0	20	20÷ 0,333= 60
0	0,333	-0,333	0	0	1	20	20÷ -0,333= -60

Variável que sai: xF_1

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b
1	-0,333	-0,667	0	0	0	20
0	2,667	1,333	0	1	0	30
0	0,667	0,333	1	0	0	20
0	0,333	-0,333	0	0	1	20

linha pivô: segunda linha (L_2)

elemento pivô: 1,333

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b
1	-0,333	-0,667	0	0	0	20
0	2,667	1,333	0	1	0	30
0	0,667	0,333	1	0	0	20
0	0,333	-0,333	0	0	1	20

LINHA PIVÔ:	0	2,667	1,333	0	1	0	30
÷1,333:	0	2	1	0	0,75	0	22,50

NOVA LINHA PIVÔ

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b
1	-0,333	-0,667	0	0	0	20
0	2,667	1,333	0	1	0	30
0	0,667	0,333	1	0	0	20
0	0,333	-0,333	0	0	1	20

L_1

NOVA LINHA PIVÔ:	0	2	1	0	0,75	0	22,50
x 0,667 :	0	1,333	0,667	0	0,5	0	15
L_1 :	1	-0,333	-0,667	0	0	0	20
Σ :	1	1	0	0	0,5	0	35

NOVA L_1

Prof. Dr. André Andrade Longaray
longaray@bol.com.br

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b
1	-0,333	-0,667	0	0	0	20
0	2,667	1,333	0	1	0	30
0	0,667	0,333	1	0	0	20
0	0,333	-0,333	0	0	1	20

L_3

NOVA LINHA PIVÔ:	0	2	1	0	0,75	0	22,50
x -0,333 :	0	-0,667	-0,333	0	-0,25	0	-7,5
L_3 :	0	0,667	0,333	1	0	0	20
Σ :	0	0	0	1	-0,25	0	12,5

NOVA L_3

Prof. Dr. André Andrade Longaray
longaray@bol.com.br

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b
1	-0,333	-0,667	0	0	0	20
0	2,667	1,333	0	1	0	30
0	0,667	0,333	1	0	0	20
0	0,333	-0,333	0	0	1	20

L_4

NOVA LINHA PIVÔ:	0	2	1	0	0,75	0	22,50
x 0,333 :	0	0,667	0,333	0	0,25	0	7,5
L_4 :	0	0,333	-0,333	0	0	1	20
Σ :	0	1	0	0	-0,25	1	27,5

NOVA L_4

Prof. Dr. André Andrade Longaray
longaray@bol.com.br

Z	X_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b
1	1	0	0	0,5	0	35
0	2	1	0	0,75	0	22,5
0	0	0	1	-0,25	0	12,5
0	1	0	0	0,25	1	27,5

Variáveis não-básicas:

$x_1 = 0$

$xF_1 = 0$

Variáveis-básicas:

$x_3 = 12,5$

$x_2 = 22,5$

$xF_2 = 27,5$

Valor de Z:

$Z = 35$

Z	x_1	x_2	x_3	xF_1	xF_2	b
1	1	0	0	0,5	0	35
0	2	1	0	0,75	0	22,5
0	0	0	1	-0,25	0	12,5
0	1	0	0	0,25	1	27,5

A SOLUÇÃO É ÓTIMA!!!

Variáveis não-básicas:
$x_1 = 0$
$xF_1 = 0$

Variáveis-básicas:
$x_3 = 12,5$
$x_2 = 22,5$
$xF_2 = 27,5$

Valor de Z:
$Z = 35$

PRINCIPAIS EXCEÇÕES AO MODELO GERAL DA PL:

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

1. PROBLEMA DA MINIMIZAÇÃO

2. PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

O PROBLEMA DA MINIMIZAÇÃO

Quando tivermos um problema em que todas as restrições são do tipo "≤" e a função objetivo for de **MINIMIZAÇÃO**, devemos alterá-la da seguinte forma:

$$Min\ Z = Max\ -Z$$

O PROBLEMA DA MINIMIZAÇÃO

Na prática, você deve multiplicar por (-1) a função objetivo original.

Exemplo:

minimizar $Z = -3x_1 + 2x_2$

É equivalente a:

$(-Z) = +3x_1 - 2x_2$

O PROBLEMA DA MINIMIZAÇÃO

IMPORTANTE:

Resolvido o modelo equivalente, teremos a solução do modelo original com a **troca do sinal de Z**.

EXEMPLO

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 1x_2 \geq 10$$
$$1x_1 + 5x_2 \geq 15$$
$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0$$

Reduzir à forma canônica

$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito a:

$2x_1 + 1x_2 \geq 10$
$1x_1 + 5x_2 \geq 15$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$

$\text{Max } W = -3x_1 - 2x_2$

Sujeito a:

$2x_1 + 1x_2 - xF_1 + a_1 = 10$
$1x_1 + 5x_2 - xF_2 + a_2 = 15$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$
$xF_1 \geq 0; xF_1 \geq 0$
$a_1 \geq 0; a_2 \geq 0$

Solução básica inicial

Max W = -3x_1 - 2x_2

Sujeito a:

$2x_1 + 1x_2 - \mathbf{xF_1 + a_1 =} 10$
$1x_1 + 5x_2 - \mathbf{xF_2 + a_2 =} 15$
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$
$xF_1 \geq 0; xF_1 \geq 0$
$a_1 \geq 0; a_2 \geq 0$

Variáveis não-básicas:

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$xF_1 = 0$
$xF_2 = 0$

Variáveis-básicas:

$a_1 = 10$
$a_2 = 15$

Valor de W:

W = 0

Temos que usar o big M para expulsar a_1 e a_2 da solução básica inicial!!!

$$\text{Max } W = -3x_1 - 2x_2 - M_1a_1 - M_2a_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 1x_2 - xF_1 + a_1 = 10$$
$$1x_1 + 5x_2 - xF_2 + a_2 = 15$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$
$$xF_1 \geq 0;\ xF_1 \geq 0$$
$$a_1 \geq 0;\ a_2 \geq 0$$

Quadro SIMPLEX

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	3	2	0	0	M_1	M_2	0
0	2	1	-1	0	1	0	10
0	1	5	0	-1	0	1	15

Variável que entra

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	3	2	0	0	M_1	M_2	0
0	2	1	-1	0	1	0	10
0	1	5	0	-1	0	1	15

Variável que entra: x_1 **ARBITRARIAMENTE**

Variável que sai

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b	
1	3	2	0	0	M_1	M_2	0	
0	2	1	-1	0	1	0	10	$10 \div 2 = 5$
0	1	5	0	-1	0	1	15	$15 \div 1 = 15$

Variável que sai: a_1

Linha pivô

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	3	2	0	0	M_1	M_2	0
0	2	1	-1	0	1	0	10
0	1	5	0	-1	0	1	15

Linha pivô: L_2
Elemento pivô: 2

Nova linha pivô

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	3	2	0	0	M_1	M_2	0
0	2	1	-1	0	1	0	10
0	1	5	0	-1	0	1	15

LINHA PIVÔ: 0 2 1 -1 0 1 0 10

÷2: 0 1 0,5 -0,5 0 0,5 0 5

NOVA LINHA PIVÔ

Cálculo das outras novas linhas

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
L_1	1	3	2	0	0	M_1	M_2	0
	0	2	1	-1	0	1	0	10
	0	1	5	0	-1	0	1	15

NOVA LINHA PIVÔ:	0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
x -3 :	0	-3	-1,5	1,5	0	-1,5	0	-15
L_1 :	1	3	2	0	0	M_1	M_2	0
Σ :	1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15

NOVA L_1

Cálculo das outras novas linhas

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
	1	3	2	0	0	M_1	M_2	0
	0	2	1	-1	0	1	0	10
L_3	0	1	5	0	-1	0	1	15

NOVA LINHA PIVÔ:	0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
x -1 :	0	-1	-0,5	0,5	0	-0,5	0	-5
L_3 :	0	1	5	0	-1	0	1	15
Σ :	0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10

NOVA L_3

Novo tableau SIMPLEX

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15
0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10

Nova solução

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15
0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10

Variáveis não-básicas:

$a_1 = 0$

$x_2 = 0$

$xF_1 = 0$

$xF_2 = 0$

Variáveis-básicas:

$x_1 = 5$

$a_2 = 10$

Valor de W:

$W = 0$

Variável que entra

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15
0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10

Variável que entra: xF_1

Variável que sai

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15
0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10

Variável que sai: a_2

Linha pivô

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15
0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10

Linha pivô: L_3
Elemento pivô: 0,5

Nova linha pivô

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15
0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10

LINHA PIVÔ: 0 0 4,5 0,5 -1 -0,5 1 10

÷0,5: 0 0 9 1 -2 -1 2 20

NOVA LINHA PIVÔ

Cálculo das novas linhas

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
L_1	1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15
	0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
	0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10

NOVA LINHA PIVÔ:	0	0	9	1	-2	-1	2	20
x -1,5 :	0	0	-13,5	-1,5	3	1,5	-3	-30
L_1 :	1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15
Σ :	1	0	-13	0	3	M_1	M_2	-45

NOVA L_1

Cálculo das novas linhas

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
	1	0	0,5	1,5	0	M_1	M_2	-15
L_2	0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
	0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10

NOVA LINHA PIVÔ:	0	0	9	1	-2	-1	2	20
x 0,5 :	0	0	4,5	0,5	-1	-0,5	1	10
L_2 :	0	1	0,5	-0,5	0	0,5	0	5
Σ :	0	1	5	0	-1	0	1	15

NOVA L_2

Novo tableau SIMPLEX

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	-13	0	3	M_1	M_2	-45
0	1	5	0	-1	0	1	15
0	0	9	1	-2	-1	2	20

Nova solução

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	-13	0	3	M_1	M_2	-45
0	1	5	0	-1	0	1	15
0	0	9	1	-2	-1	2	20

Variáveis não-básicas:

$a_1 = 0$

$a_2 = 0$

$x_2 = 0$

$xF_2 = 0$

Variáveis-básicas:

$x_1 = 15$

$xF_1 = 20$

Valor de W:

$W = -45$

Nova solução

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	-13	0	3	M_1	M_2	-45
0	1	5	0	-1	0	1	15
0	0	9	1	-2	-1	2	20

Variáveis não-básicas:

$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{array}}$

$x_2 = 0$

$xF_2 = 0$

Variáveis-básicas:

$x_1 = 15$

$xF_1 = 20$

Valor de W:

$W = -45$

Nova solução

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	a_1	a_2	b
1	0	-13	0	3	M_1	M_2	-45
0	1	5	0	-1	0	1	15
0	0	9	1	-2	-1	2	20

VARIÁVEIS ARTIFICIAIS FORAM EXPULSAS!!! PODEMOS ABANDONÁ-LAS AGORA!!!

Variáveis não-básicas:

$\boxed{a_1 = 0 \quad a_2 = 0}$

$x_2 = 0$

$xF_2 = 0$

Variáveis-básicas:

$x_1 = 15$

$xF_1 = 20$

Valor de W:

$W = -45$

Novo tableau SIMPLEX

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1	0	-13	0	3	-45
0	1	5	0	-1	15
0	0	9	1	-2	20

Variável que entra

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1	0	-13	0	3	-45
0	1	5	0	-1	15
0	0	9	1	-2	20

Variável que entra: x_2

Variável que sai

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1	0	-13	0	3	-45
0	1	5	0	-1	15
0	0	9	1	-2	20

Variável que sai: xF_1

Linha pivô

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1	0	-13	0	3	-45
0	1	5	0	-1	15
0	0	9	1	-2	20

Linha pivô: L_3
Elemento pivô: 9

Nova linha pivô

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1	0	-13	0	3	-45
0	1	5	0	-1	15
0	0	9	1	-2	20

LINHA PIVÔ:	0	0	9	1	-2	20
÷9:	0	0	1	0,111	-0,222	2,222

NOVA LINHA PIVÔ

Cálculo das outras linhas

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
L1	1	0	-13	0	3	-45
	0	1	5	0	-1	15
	0	0	9	1	-2	20

NOVA LINHA PIVÔ:	0	0	1	0,111	-0,222	2,222
X 13:	0	0	13	1,443	-2,886	28,886
+ L_1:	1	0	-13	0	3	-45
Σ:	1	0	0	1,443	0,114	-16,114

NOVA L_1

Cálculo das outras linhas

	W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
	1	0	-13	0	3	-45
L2	0	1	5	0	-1	15
	0	0	9	1	-2	20

NOVA LINHA PIVÔ:	0	0	1	0,111	-0,222	2,222
X -5:	0	0	-5	-0,555	1,11	-11,11
+ L_2:	0	1	5	0	-1	15
Σ:	0	1	0	-0,555	0,11	3,89

NOVA L_2

Novo tableau SIMPLEX

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1	0	0	1,443	0,114	-16,114
0	1	0	-0,555	0,11	3,89
0	0	1	0,111	-0,222	2,222

Nova solução

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1	0	0	1,443	0,114	-16,114
0	1	0	-0,555	0,11	3,89
0	0	1	0,111	-0,222	2,222

Variáveis não-básicas:

$xF_1 = 0$

$xF_2 = 0$

Variáveis-básicas:

$x_1 = 3,89$

$x_2 = 2,222$

Valor de W:

W = -16,114

Análise da nova solução

W	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1	0	0	1,443	0,114	-16,114
0	1	0	-0,555	0,11	3,89
0	0	1	0,111	-0,222	2,222

A SOLUÇÃO É ÓTIMA, POIS NÃO HÁ COEFICIENTES NEGATIVOS NA F.O. TRANSFORMADA!!!!

Análise da nova solução

COMO CHEGAMOS AO FIM DO MODELO, DEVEMOS TROCAR O SINAL DE W (-Z)!!!

$$\begin{cases} W = -16{,}114 \\ \\ W \Rightarrow (-Z) \\ (-Z) = -16.114 \\ \\ Z = 16{,}114 \end{cases}$$

Com:

$x_1 = 3{,}89$

$x_2 = 2{,}222$