LabSAD

Laboratório de estudos e pesquisas em
Metodologias de Sistemas de Apoio à Decisão

Resolução de modelos de Programação Linear – casos especiais
PARTE II

Prof. Dr. André Andrade Longaray

índice

- O problema da variável livre
- Empate na variável de entrada
- Empate na variável de saída
- Solução ilimitada
- Múltiplas soluções

O PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

Se alguma variável do modelo não possuir a condição de não-negatividade, podemos substituí-la pela diferença de duas outras variáveis não-negativas, pois um número qualquer pode ser escrito como a diferença de dois números positivos.

O PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

Exemplo:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 + X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 20$$

$X_1 \geq 0$; $X_2 \Rightarrow$ livre

O PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

Fazendo $X_2 = X_4 - X_5$, com $X_4 \geq 0$ e $X_5 \geq 0$ e substituindo no modelo anterior, teremos o modelo equivalente.

O PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

Fazendo $X_2 = X_4 - X_5$, com $X_4 \geq 0$ e $X_5 \geq 0$ e substituindo no modelo anterior, teremos o modelo equivalente:

Exemplo:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 + X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 20$$

$X_1 \geq 0$; $X_2 \Rightarrow$ livre

O PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

Fazendo $X_2 = X_4 - X_5$, com $X_4 \geq 0$ e $X_5 \geq 0$ e substituindo no modelo anterior, teremos o modelo equivalente:

Exemplo:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 + X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 20$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \Rightarrow \text{livre}$$

$$\text{Max } Z = X_1 + 2(X_4 - X_5) + X_3$$

$$X_1 + (X_4 - X_5) + X_3 \leq 10$$

$$2X_1 + 3(X_4 - X_5) \leq 20$$

$$X_1 \geq 0;\ X_4 \geq 0;\ X_5 \geq 0;\ X_3 \geq 0$$

O PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

$$\text{Max } Z = X_1 + 2(X_4 - X_5) + X_3$$

$$X_1 + (X_4 - X_5) + X_3 \leq 10$$

$$2X_1 + 3(X_4 - X_5) \leq 20$$

$$X_1 \geq 0;\ X_4 \geq 0;\ X_5 \geq 0;\ X_3 \geq 0$$

A solução deste novo modelo resolve o anterior!!!

índice

- O problema da variável livre
- **Empate na variável de entrada**
- Empate na variável de saída
- Solução ilimitada
- Múltiplas soluções

EMPATE NA VARIÁVEL DE ENTRADA

Quando houver empate na escolha da variável que entra na base, deve-se tomar a decisão arbitrariamente.

EMPATE NA VARIÁVEL DE ENTRADA

Exemplo:

X_1	X_2	b
-1	-1	0
2	3	7
1	4	15

EMPATE NA VARIÁVEL DE ENTRADA

X_1	X_2	b
-1	-1	0
2	3	7
1	4	15

Tanto faz X_1 ou X_2!!!

EMPATE NA VARIÁVEL DE ENTRADA

A única implicação envolvida é que pode-se escolher um caminho mais longo ou mais curto para chegar à solução ótima.

índice

- O problema da variável livre
- Empate na variável de entrada
- **Empate na variável de saída**
- Solução ilimitada
- Múltiplas soluções

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

No desenvolvimento do SIMPLEX, a linha pivô é a restrição que apresenta o menor quociente não-negativo, na divisão dos termos independentes pelos coeficientes positivos da variável que entra

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Entretanto, pode ocorrer que haja mais de um resultado nessas condições.

Exemplo:

Max $Z = 5x_1 + 2x_2$

$X1 \leq 3$

$X2 \leq 4$

$4X1 + 3X2 \leq 12$

$X1 \geq 0; X2 \geq 0$

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Z	X_1	x_2	xF_1	xF_2	xF_3	b
1	-5	-2	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	0	4
0	4	3	0	0	1	12

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Variável que entra

Z	X_1	x_2	xF_1	xF_2	xF_3	b
1	-5	-2	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	0	4
0	4	3	0	0	1	12

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Variável que entra

Z	X_1	x_2	xF_1	xF_2	xF_3	b
1	-5	-2	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	0	4
0	4	3	0	0	1	12

$$\left.\begin{array}{l} 3 \div 1 = 3 \\ 4 \div 0 = \nexists \\ 12 \div 4 = 3 \end{array}\right\} ?$$

QUAL VARIÁVEL DEVE SAIR???

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Devemos escolher arbitrariamente um deles para calcular a solução.

Eu escolhi x_{F1} ALEATÓRIAMENTE !!!

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

CALCULANDO TODAS AS NOVAS LINHAS TEREMOS:

Z	**X_1**	**x_2**	**XF_1**	**xF_2**	**xF_3**	**b**
1	0	-2	5	0	0	15
0	1	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	0	4
0	0	3	-4	0	1	0

Variáveis não-básicas:
$x_2 = 0$
$xF_1 = 0$

Variáveis-básicas:
$x_1 = 3$
$xF_2 = 4$
$xF_3 = 0$

Valor de Z:
$Z = 15$

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Entretanto, essa solução apresenta uma variável básica com valor nulo!!!

Z	X_1	x_2	XF_1	xF_2	xF_3	b
1	0	-2	5	0	0	15
0	1	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	0	4
0	0	3	-4	0	1	0

Variáveis não-básicas:
$x_2 = 0$
$xF_1 = 0$

Variáveis-básicas:
$x_1 = 3$
$xF_2 = 4$
$xF_3 = 0$

Valor de Z:
Z = 15

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Isso sempre ocorrerá quando houver um empate na saída

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

A saída de uma variável básica nula provoca o aparecimento de outra variável básica nula na solução seguinte, sem alteração do valor do objetivo

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Retornando ao quadro de nosso exemplo:

Z	**X_1**	**x_2**	**XF_1**	**xF_2**	**xF_3**	**b**
1	0	-2	5	0	0	15
0	1	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	0	4
0	0	3	-4	0	1	0

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Retornando ao quadro de nosso exemplo:

Variável que entra!

Z	**X_1**	**x_2**	**XF_1**	**xF_2**	**xF_3**	**b**
1	0	-2	5	0	0	15
0	1	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	0	4
0	0	3	-4	0	1	0

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Retornando ao quadro de nosso exemplo:

Variável que entra!

Z	X_1	x_2	XF_1	xF_2	xF_3	b
1	0	-2	5	0	0	15
0	1	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	0	4
0	0	3	-4	0	1	0

$3 \div 0 = \nexists$

$4 \div 1 = 4$

$\boxed{0 \div 3 = 0}$

SAI xF_3

longaray@bol.com.br

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

CALCULANDO TODAS AS NOVAS LINHAS TEREMOS:

Z	**X_1**	**x_2**	**XF_1**	**xF_2**	**xF_3**	**b**
1	0	0	7/3	0	2/3	15
0	1	0	1	0	0	3
0	0	0	4/3	1	-1/3	4
0	0	1	-4/3	0	1/3	0

Variáveis não-básicas:
$xF_1 = 0$
$xF_3 = 0$

Variáveis-básicas:
$x_1 = 3$
$x_2 = 0$
$xF_2 = 4$

Valor de Z:
$Z = 15$

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Z	X_1	x_2	XF_1	xF_2	xF_3	b
1	0	0	7/3	0	2/3	15
0	1	0	1	0	0	3
0	0	0	4/3	1	-1/3	4
0	0	1	-4/3	0	1/3	0

Variáveis não-básicas:
$xF_1 = 0$
$xF_3 = 0$

Variáveis-básicas:
$x_1 = 3$
$x_2 = 0$
$xF_2 = 4$

Valor de Z:
$Z = 15$

Como podemos ver, X_2 entrou na base com valor nulo, e o valor de Z não modificou!!!

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Neste caso, a solução é chamada degenerada!!!

Observação importante: se os coeficientes da função reiterarem coeficientes negativos, repetidamente, sem modificação de Z, entrou-se no que se chama de "circuito fechado".

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA (DEGENARAÇÃO)

Observação importante: se os coeficientes da função reiterarem coeficientes negativos, repetidamente, sem modificação de Z, entrou-se no que se chama de "circuito fechado".

Neste caso, depois de algumas iterações com mesmo Z, abandona-se o modelo.

índice

- O problema da variável livre
- Empate na variável de entrada
- Empate na variável de saída
- **Solução ilimitada**
- Múltiplas soluções

O PROBLEMA DA SOLUÇÃO ILIMITADA

Isto ocorre quando a variável que entra na base não possui em sua coluna nenhum coeficiente positivo.

Exemplo:

x_1	x_2	b
1	-3	0
2	-2	7
1	-4	15

índice

- O problema da variável livre
- Empate na variável de entrada
- Empate na variável de saída
- Solução ilimitada
- **Múltiplas soluções**

O PROBLEMA DE SOLUÇÕES MÚLTIPLAS

Se na <u>solução ótima</u> o coeficiente de uma variável não básica é zero, ele poderá entrar na base sem alterar o valor do objetivo, gerando outra solução ótima.

O PROBLEMA DE SOLUÇÕES MÚLTIPLAS

Exemplo:

Z	**x_1**	**x_2**	**XF_1**	**xF_2**	**b**
1	0	0	0	1	15
0	1	0	1	2	3
0	0	1	3	4	6

Se xF_1 entrar na base na próxima iteração, teremos Z = 15, mas com X_1 e X_2 com valores diferentes!!!