Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF

Edital 15 – CAPES

Matemática Básica
Para Ciências Sociais II

FUNÇÕES
Parte B

Prof. Antônio Maurício Medeiros Alves
Profª Denise Maria Varella Martinez

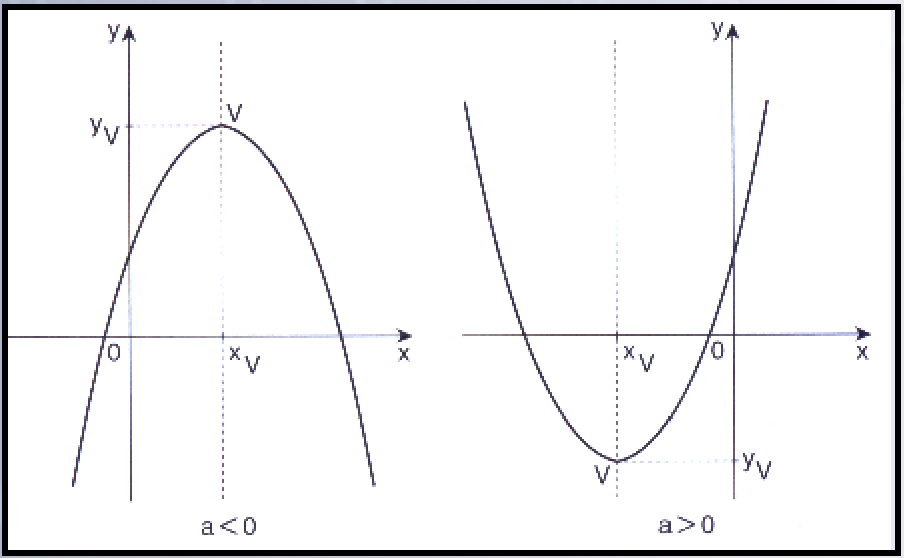
UNIDADE 1 – FUNÇÕES

PARTE B

1. FUNÇÂO DO SEGUNDO GRAU - FUNÇÃO QUADRÁTICA

1.1. Definição:

Uma equação da forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ com $x \in \Re$ e a≠0 é chamada de função quadrática em *x*. Dependendo do valor de *a*, a parábola poderá ter uma das formas mostradas abaixo:



O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é representado por uma curva aberta, chamada parábola. Se o coeficiente "*a*" da função for maior do que zero, a >0, a parábola apresenta concavidade voltada para cima, se a < 0 a parábola apresenta concavidade voltada para baixo. Em ambos os casos a parábola é simétrica em torno de uma reta vertical paralela ao eixo *y*. Essa reta de simetria corta a parábola em um ponto chamado de vértice (V).

Exemplos de função do segundo grau:

$f(x) = x^2 + 25$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = 25$.

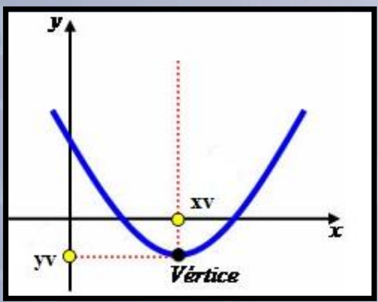
$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, onde $a = 3$, $b = 2$ e $c = -1$.

$f(x) = x^2$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$.

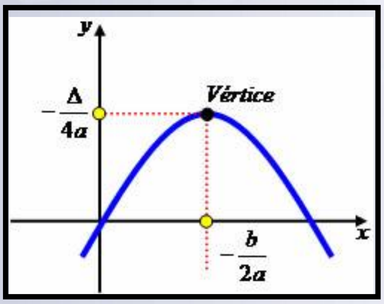
.

1.2. Vértice

O Vértice é um ponto de ordenada máxima ou um ponto de ordenada mínima (Ponto de Máximo ou Ponto de Mínimo), sendo a abscissa do vértice dada por $x_v = -\frac{b}{2a}$ e a ordenada dada por $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Logo o vértice da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dado pelo ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.



Se $a > 0$ então para $x_v = -\frac{b}{2a}$ a função tem seu valor mínimo dado por $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$



Se $a < 0$ então para $x_v = -\frac{b}{2a}$ a função tem seu valor máximo dado por $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

1.3. Raízes

Os zeros ou raízes de uma função quadrática são os valores de x que anulam a função, ou seja, são os pontos onde a ordenada é nula, f(x)= y = 0.

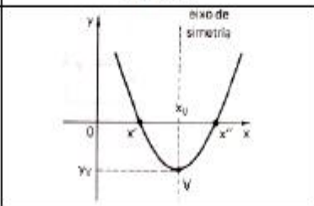
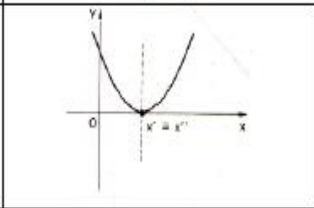
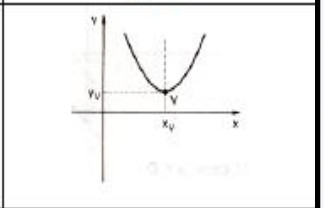
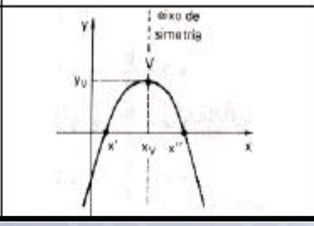
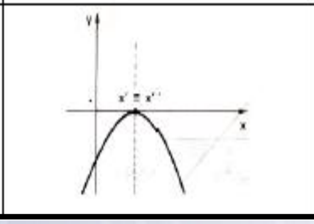
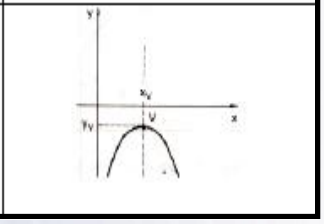
Para se obter as raízes de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ resolve-se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, aplicando a fórmula de Bháskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Assim obtemos as raízes x_1 e x_2. Lembramos que:

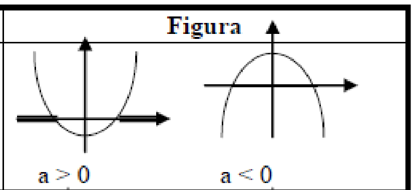
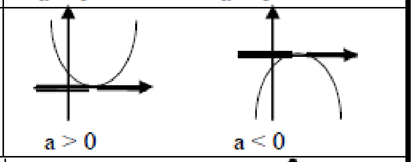
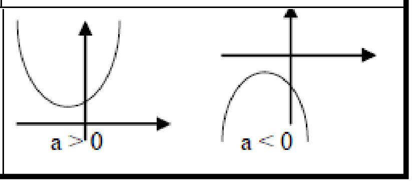
$\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação (Δ delta).

- Se $\Delta > 0 \rightarrow$ a função apresenta duas raízes reais e diferentes, x_1 e x_2.
- Se $\Delta = 0 \rightarrow$ a função apresenta duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$.
- Se $\Delta < 0 \rightarrow$ a função não tem zero real.

1.4. Estudo do sinal da função

Estudar o sinal de uma função y = f(x) significa determinar os valores reais de x que tornam a função: positiva (y> 0), negativa (y <0) ou nula (y = 0). Devemos considerar três casos, de acordo com o valor do coeficiente “a” e do discriminante Δ:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Valor de $\Delta=b^2-4ac$	Conclusão	Figura
$\Delta > 0$	$\begin{cases} a > 0 & \text{Positivo no Exterior das Raizes} \\ a < 0 & \text{Positivo no Interior das Raizes} \end{cases}$	
$\Delta = 0$	$\begin{cases} a > 0 & \text{0 no Vertice e Positivo nos demais x} \\ a < 0 & \text{0 no Vertice e Negativo nos demais x} \end{cases}$	
$\Delta < 0$	$\begin{cases} a > 0 & \text{Sempre Positivo} \\ a < 0 & \text{Sempre Negativo} \end{cases}$	

Podemos seguir a regra: entre as raízes sinal contrário ao de “a**”**, fora das raízes o mesmo sinal de “a”.

Exemplo:

Estudar o sinal da função $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Aplicando Bháskara em $3x^2 - 4x + 1 = 0$ temos:

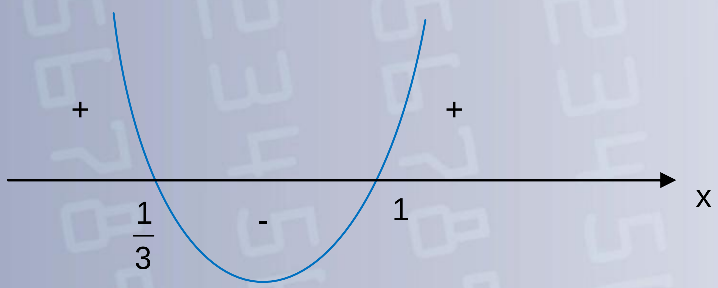
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.3.1}}{2.3}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Logo a parábola corta o eixo das abscissas em 1 e $\frac{1}{3}$, e como $a = 3 > 0$ a concavidade da parábola é voltada para cima.



Estudando o sinal da função através do método prático de esboço do gráfico temos:

Quando $x < \frac{1}{3}$ ou $x > 1 \Rightarrow y > 0$

Quando $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 1 \Rightarrow y = 0$

Quando $\frac{1}{3} < x < 1 \Rightarrow y < 0$

Exemplo:

Dada a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Calcule o vértice e construa o gráfico.

Calculando o vértice:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$, temos $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$$

$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, sabendo que $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\left[(-2)^2 - 4.1.(-3)\right]}{4.1} = -\frac{(4+12)}{4} = -\frac{16}{4} = -4$$

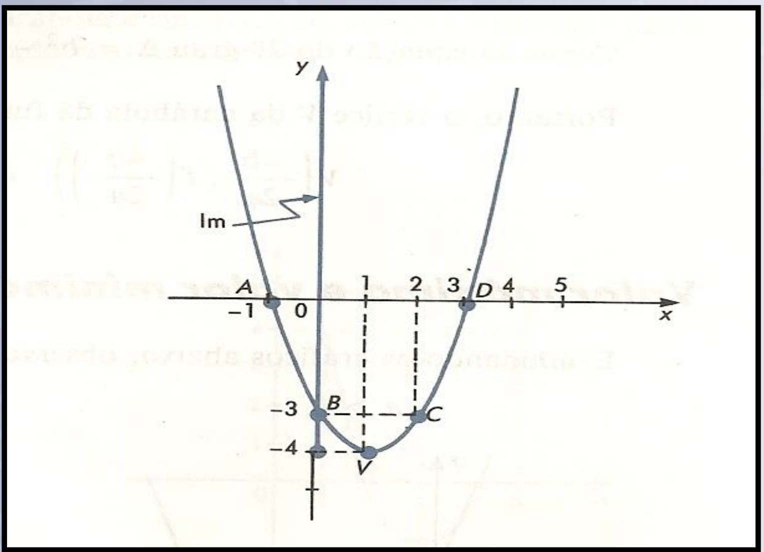
Portanto o vértice será $V(1,-4)$.

Construindo o gráfico:

Atribuindo valores para x:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

Para
$x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 - 2.(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$ $(-2,5)$
$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 - 2.(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ $(-1,0)$
$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 - 2.0 - 3 = -3$ $\Rightarrow$ $(0,-3)$
$x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 - 2.1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$ $(1,-4)$
$x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 2.2 - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$ $(2,-3)$



2. FUNÇÃO RECEITA E LUCRO QUADRÁTICAS:

Na parte A de Funções, vimos como obter a função receita quando o preço era constante. Agora vamos obter a função receita quando o preço pode ser modificado de acordo com a demanda do produto.

Exemplo : A função demanda de um produto é $P = 10 - x$ e a função custo é $C = 20 + x$.

a) Obtenha a função receita e o preço que a maximiza.

B) Obtenha a função lucro e o preço que a maximiza.

Solução:

a) a função receita é dada por $R = Px$, se $P = 10 - x$, substituindo em R, obtemos:

$R = (10 - x)x = 10x - x^2 = -x^2 + 10x$, assim a receita é uma função quadrática de x e seu gráfico é uma parábola de concavidade voltada para baixo (a<0). Portanto o valor de x que maximiza a receita é dado pela abscissa do vértice $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2(-1)} = 5$. Conseqüentemente, o preço é dado pela função procura ou de demanda $P = 10 - x = 10 - 5 = 5$.

b) A função lucro é dada por $L(x) = R(x) - C(x)$,

logo $L(x) = -x^2 + 10x - (20 + x) = -x^2 + 9x - 20$, o que mostra que o função lucro também é uma função quadrática. Assim, o valor de x que maximiza o lucro é dado por $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2(-1)} = 4{,}5$.

O correspondente preço é $P = 10 - x = 10 - 4{,}5 = 5{,}5$.

Exemplo: Uma companhia de televisão a cabo estima que com x milhares de assinaturas, o faturamento e o custo mensais(em milhões de dólares) são: $R(x) = 32x - 0{,}21x^2$ e $C(x) = 195 + 12x$. Encontre o número de assinantes para o qual o faturamento é igual ao custo, ou seja, o ponto de lucro zero.

Solução:

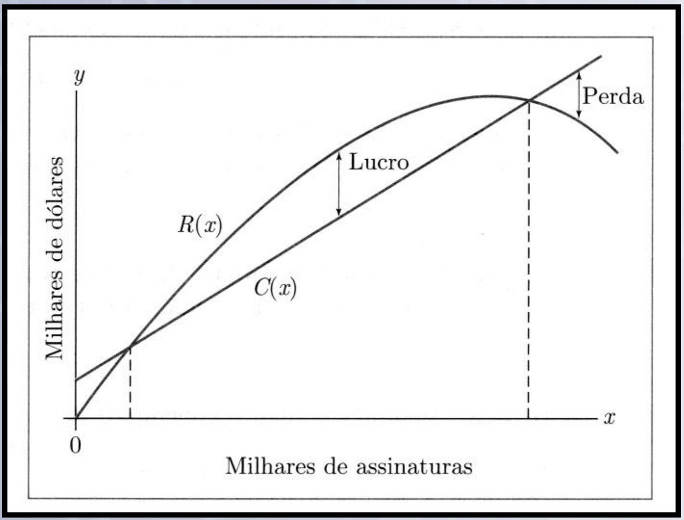
Seja $L(x) = R(x) - C(x)$ a função lucro , então,

$L(x) = (32 - 0{,}21x^2) - (195 + 12x)$,

$L(x) = -0{,}21x^2 + 20x - 195$ (o gráfico da função quadrática será uma parábola de concavidade voltada para baixo). Os pontos nos quais o faturamento (receita) se iguala aos custos correspondem ao lucro zero. Desta forma, precisamos resolver $0{,}21x^2 + 20x - 195 = 0$. Determinando as raízes ou zeros:

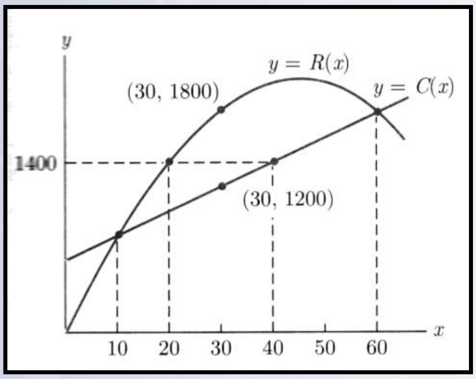
$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(-0{,}21)(-195)}}{2(-0{,}21)}, \quad x = \frac{-20 \pm \sqrt{236{,}2}}{-0{,}42} \approx 47{,}62 \pm 36{,}59, \text{ logo}$$

$x = 11{,}03$ e $x = 84{,}21$ (são os pontos onde a parábola intercepta o eixo x). Os pontos nos quais o faturamento se iguala ao custo ocorrem quando a companhia tem 11030 ou 84210 assinantes. Entre estes dois valores a companhia será rentável (lucro positivo), conforme mostra o gráfico abaixo.



Retirado do livro Economia, Administração e Contabilidade Matemática aplicada, Larry Goldstein et al.

Exemplo: As funções custo e receita (faturamento) são dadas pelo gráfico abaixo. O custo para se produzir x unidades de um determinado produto é C(x) dólares e o faturamento obtido pela venda de x unidades é R(x) dólares.



a) Qual o valor do faturamento e do custo de produção e venda de 30 unidades do produto? R(30)=1800 e C(30)=1200, logo a receita ou faturamento é de U$ 1800,00 e o custo é de U$ 1200,00.

b) Para que nível de produção o custo é de $1400? Para quando são produzidas 40 unidades

c) Em que intervalo de produção apresenta lucro? L=R-C, então há lucro quando são produzidas de 10 a 60 unidades do produto.

3. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Relembrando algumas propriedades das potências de base positiva e expoente racional:

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$x^a : x^b = x^{a-b}$
$(x.y)^a = x^a \cdot x^b$	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{x^b}$
$\left(x^a\right)^b = x^{a.b}$	$x^1 = x$
$x^0 = 1$	$x^{-a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a$
$(a)^{1/x} = \sqrt[x]{a}$	$(a)^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$

Uma função exponencial é qualquer função na qual a regra especifica a variável independente como um expoente. Uma função exponencial tem a forma $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$, sendo $f : \Re \rightarrow \Re_+^*$. Essas restrições são importantes, pois para $a = 0$ e x negativo, a^x não existiria, ou seja, não teríamos uma função em $\Re$.

3.1. Equações e Inequações Exponenciais

A seguir alguns exemplos de resolução de equações e inequações exponenciais:

1) Resolva as equações $3^x = 9$, $\sqrt{3} = 27^x$, $9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - x}$.

a) $3^x = 9$

$$3^2 = 9 \Rightarrow \underbrace{3^x = 3^2}_{\text{mesma base}} \Rightarrow x = 2$$

Logo a solução da equação é $S = \{2\}$.

b) $\sqrt{3} = 27^x$

$$\sqrt{3} = 3^{1/2} \text{ e } 27 = 3^3 \text{, então } 3^{1/2} = \left(3^3\right)^x \Rightarrow \underbrace{3^{1/2} = 3^{3x}}_{\text{mesma base}} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

Logo a solução da equação é $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

c) $9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - x}$

$$9 = 3^2 \text{ e } \frac{1}{3} = 3^{-1} \text{ logo}$$

$$\left(3^2\right)^x = \left(3^{-1}\right)^{x^2 - x} \Rightarrow \underbrace{3^{2x} = 3^{x - x^2}}_{\text{mesma base}} \Rightarrow 2x = x - x^2 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x' = 0 \text{ e } x'' = -1$$

Logo a solução da equação é $S = \{-1, 0\}$.

2) Resolva as inequações $10^x > 1000$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < \frac{9}{4}$, $\frac{1}{3} \leq 3^{-x} < 9^{x+1}$.

a) $10^x > 1000$

$$1000 = 10^3 \Rightarrow 10^x > 10^3$$

Como as bases são iguais e maiores que 1, $x > 3$. Logo o conjunto solução é $S = \{x \in \Re / x > 3\}$.

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \langle \frac{9}{4}$

$\frac{9}{4}=\frac{3^2}{2^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, se $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, então $x-1 > -2 \Rightarrow x > -1$, pois as bases são iguais, positivas e menores que 1. Logo o conjunto solução é $S=\{x \in \Re / x \rangle -1\}$.

c) $\underbrace{\frac{1}{3} \le}_{\mathrm{I}} 3^{-x} \underbrace{\langle 9^{x+1}}_{\mathrm{II}}$

Analisando I temos:

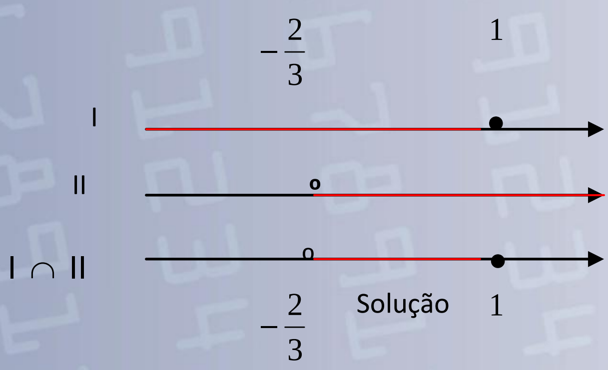
$\frac{1}{3} \le 3^{-x} \Rightarrow 3^{-1} \le 3^{-x} \Rightarrow -1 \le -x \Rightarrow x \le 1$ (pois as bases são iguais e maiores que 1).

Agora analisando II temos:

$$3^{-x} \langle 9^{x+1} \Rightarrow 3^{-x} < \left(3^2\right)^{x+1} \Rightarrow 3^{-x} < 3^{2x+2} \Rightarrow -x \langle 2x+2 \Rightarrow 3x \rangle -2 \Rightarrow x \rangle -\frac{2}{3}$$

(pois as bases são iguais e maiores que 1).

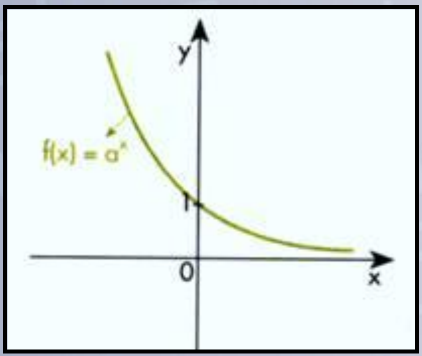
Nesse caso a solução será I $\cap$ II. Vejamos no esboço do gráfico:



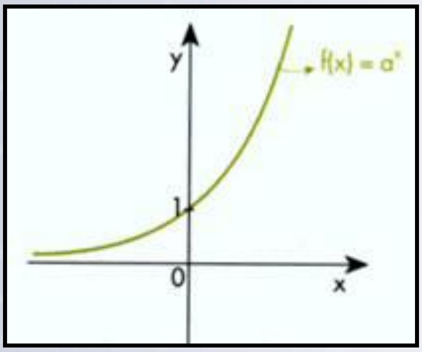
Logo o conjunto solução é

$$S=\left\{x \in \Re / -\frac{2}{3} \langle x \le 1\right\}$$

3.2. Gráfico da Função Exponencial



Função Decrescente quando
$0 < a < 1$



Função Crescente quando
$a > 1$

O gráfico de uma função exponencial é chamado de curva exponencial e, como pode ser observado acima, passa pelo ponto $(0,1)$. Além disso, o gráfico não "toca" o eixo x e não tem pontos no 3° e 4° quadrantes. O domínio dessa função é $\Re$, ou seja: $D(f) = \Re$ e a imagem é $\Re_+^*$, ou seja, $Im(f) = \Re_+^*$. Podemos observar que para todo $x \in \Re$ temos $a^x > 0$, logo o gráfico da função fica acima do eixo x.

Exemplo:

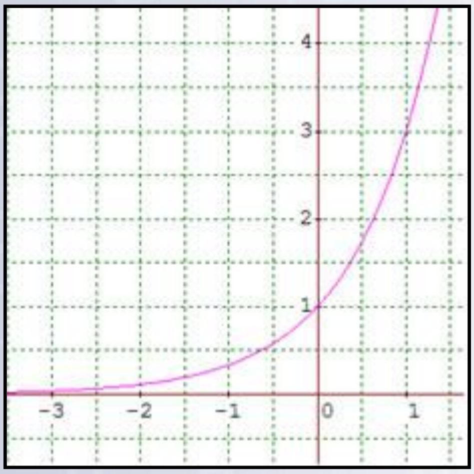
1. Construa o gráfico das funções:

a) $f(x) = 3^x$

Atribuindo valores para x

x	$f(x) = 3^x$
-4	$\frac{1}{81} \cong 0{,}0012$
-3	$\frac{1}{27} \cong 0{,}0037$
-2	$\frac{1}{9} \cong 0{,}11$
-1	$\frac{1}{3} \cong 0{,}33$

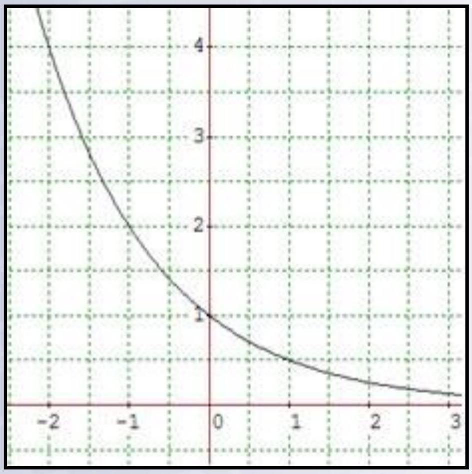
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81



b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Atribuindo valores para x:

x	$f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\dfrac{1}{2} = 0{,}5$
2	$\dfrac{1}{4} = 0{,}25$
3	$\dfrac{1}{27} \cong 0{,}0037$
4	$\dfrac{1}{16} = 0{,}0625$



2. Verifique se as funções $f(x)=4^x$, $f(x)=(0{,}84)^x$ e $f(x)=\left(\frac{3}{7}\right)^{-x}$ são crescentes ou decrescentes.

a) $f(x)=4^x$ é crescente, pois a base é maior do que 1, $4>1$.

b) $f(x)=(0{,}84)^x$ é decrescente, pois a base é maior do que zero e menor do que 1, $0<0{,}84<1$.

c) $f(x)=\left(\frac{3}{7}\right)^{-x}$

$\left(\frac{3}{7}\right)^{-x}=\left(\frac{7}{3}\right)^{x}$, logo a função é crescente, pois $\frac{7}{3}>1$.

3.3. Modelo de crescimento e decrescimento exponencial:

O modelo matemático que deu origem a função exponencial é conhecido como modelo de crescimento exponencial. De modo geral, se tivermos uma grandeza com valor inicial $\mathbf{y_0}$ e que cresça a uma taxa igual a **k** por unidade de tempo, então, após um tempo **x**, medido na mesma unidade de **K**, o valor dessa grandeza **y** será dado por: $y=y_0(1+k)^x$

Se **k>0** caracteriza crescimento, e **k<0** caracteriza decrescimento.

Exemplo: Uma pessoa deposita R$ 500,00 na caderneta de poupança, mensalmente, são creditados juros de 2% sobre o saldo. Sabendo que a fórmula do montante (capital+rendimento), após x meses é $M(x)=500(1+0{,}02)^x$ calcule:

a) o montante após 1 ano (12meses): $M=500(1{,}02)^{12}=634{,}12$

b) o rendimento no primeiro ano: Rendimento=montante-capital =634,12-500=134,12

Exemplo : O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 7000 e cresce a uma taxa de 3% ao ano. a) Qual o número de habitantes daqui a 8 anos? b) qual o número de habitantes daqui a 30 anos?

$y = y_0(1+k)^x$ Y_0=7000 k=taxa=3%=0,03

a) y=7000(1+0,03)^8=7000(1,03)^8=8867 habitantes.

b) y=7000(1,03)^{30}=16990 habitantes.

Exemplo: Um automóvel novo vale R$20.000,00. Sabendo-se que ele sofre uma desvalorização de 3% ao ano. Qual seu valor daqui a 5 anos?

Desvalorização $\Rightarrow$ taxa negativa k=-0,03

y=20000(1-0,03)^5=20000(0,97)^5=17.174,68.

Se o mesmo automóvel sofresse uma desvalorização de 15% ao ano, qual seu valor daqui a 5 anos?

K=-0,15 y=20000(1-0,15)^5=20000(0,85)^5=8874,10

4. FUNÇÃO LOGARITMICA

Relembrando a seguir algumas propriedades dos logaritmos:

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$	$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_a a^n = n$
$a^{\log_a b} = b$	$\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$
$\log_b(A.B) = \log_b A + \log_b B$	$\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$
$\log_b \frac{1}{A} = -\log_b A$	$\log_b(A^n) = n.\log_b A$
$\log_b \sqrt[A]{B} = \frac{1}{A}\log_b B$	$\log_b A = \frac{\log_c A}{\log_c B}$
$\log_b A = \frac{1}{\log_A b}$ ou	$\log_b A.\log_A b = 1$

A função $f(x)=\log_b x$, onde $b \in \Re_+^* - \{1\}$ e $b \neq 1$ é chamada de função logarítmica de $f: \Re_+^* \to \Re$. Essas restrições são importantes, pois somente valores positivos poderão ser atribuídos a x.

4.1. Equações logarítmicas

Veremos a seguir exemplos de resolução de equações logarítmicas:

Exemplos:

1. Resolva as seguintes equações:

a) $\log_4(5x-1)=2$

Sabemos que $5x-1>0$. Temos:

$$\log_4(5x-1)=2 \Rightarrow 5x-1=4^2 \Rightarrow 5x=17 \Rightarrow x=\frac{17}{5}$$

Verificamos que $5x-1>0 \Rightarrow 5.\frac{17}{5}-1>0 \Rightarrow 16>0$, logo a solução é $S=\left\{\frac{17}{5}\right\}$.

b) $\log_2(x^2-2x-16)=3$

Sabemos que $x^2-2x-16>0$. Temos:

$\log_2(x^2-2x-16)=3 \Rightarrow x^2-2x-16=2^3 \Rightarrow x^2-2x-24=0 \Rightarrow x=-4$ ou $x=6$ (aplicando Bhaskara).

Verificamos que

$x^2-2x-16>0 \Rightarrow (-4)^2-2.(-4)-16>\Rightarrow 16+8-16>0 \Rightarrow 8>0$, logo -4 é uma raiz.

$x^2-2x-16>0 \Rightarrow 6^2-2.6-16>0 \Rightarrow 36+12-16>0 \Rightarrow 32>0$, logo 6 é outra raiz. O conjunto solução é $S=\{-4,6\}$.

c) $\log_{(x-2)}4=2$

Sabemos que $x-2>0$ e $x-2\neq 1$. Temos:

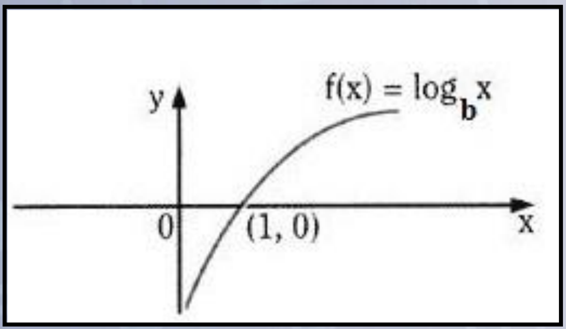
$\log_{(x-2)}4=2 \Rightarrow (x-2)^2=4 \Rightarrow x^2-4x+4=4 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=4$.

Verificamos que

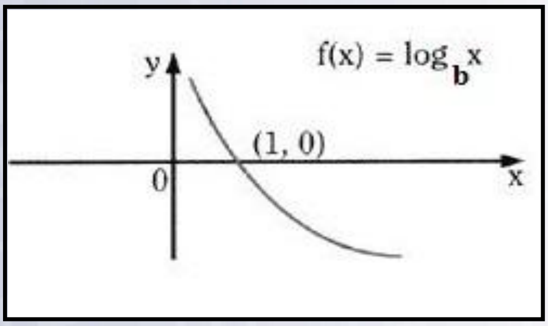
Para $x=0 \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow 0-2>0 \Rightarrow -2>0$ é falso.

Para $x=4 \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow 4-2>0 \Rightarrow 2>0$ e $x-2\neq 1 \Rightarrow 4-2\neq 1 \Rightarrow 2\neq 1$ é verdadeiro. Logo 4 é raiz da equação e o conjunto solução é $S=\{4\}$.

15.2) Gráfico da Função Logarítmica



Função Crescente $b > 1$



Função Decrescente 0 < b < 1

O gráfico de uma função logarítmica passa sempre pelo ponto $(1{,}0)$. Além disso, o gráfico não "toca" o eixo y e não tem pontos no 1° e 3° quadrantes.

OBS.: Podemos observar que a função logarítmica é o inverso da exponencial.

Exemplo: Construa o gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) $f(x) = 2^x$

Atribuindo valores para x:

x	$f(x) = 2^x$
-2	$\frac{1}{4} = 0{,}25$
-1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
0	1
1	2
2	4

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Atribuindo valores para x:

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$