Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF

Edital 15 – CAPES

Matemática Básica
Para Ciências Sociais II

BINÔMIO DE NEWTON

Prof. Antônio Maurício Medeiros Alves
Profª Denise Maria Varella Martinez

UNIDADE 2 – BINÔMIO DE NEWTON

1. INTRODUÇÃO

Isaac Newton (1643-1727) foi um físico e matemático inglês que fez importantes descobertas para a ciência. Além de criar o binômio de Newton, durante sua trajetória, ele deu importantes contribuições para a humanidade descobrindo a lei da gravidade, entre outras várias leis da física.

Nesta unidade, o objetivo principal consiste em estudar o Binômio de Newton, ou seja, todo o binômio da forma $(p+q)^n$, onde n é um número natural, chamado ordem do binômio.

2. FATORIAL DE UM NÚMERO N

O fatorial de um número natural n, denotado por $n!$, é o produto de n por todos os números naturais que o antecedem até a unidade, ou seja,

$$n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1.$$

O ponto entre as expressões, na equação anterior, representa uma multiplicação.

Lê-se: “fatorial de n” ou “n fatorial’

Observações:

1)Por definição, o fatorial de zero é igual a 1, ou seja, $0! = 1$;

2) $1! = 1$;

3) $n! = n.(n-1)!$, pois:

$$n! = n.\underbrace{(n-1).(n-2)\ldots 2.1}_{(n-1)!} = n.(n-1)!$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Exemplo 2: $2! = 2.1 = 2$

Exemplo 3: $4! = 4.3.2.1 = 24$

2. NÚMEROS BINOMIAIS

Dados dois números naturais, n e p, o par $\binom{n}{p}$ é chamado número binomial, onde

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

Lê-se: “binomial de n sobre p”

Além disso, tem-se que

$$\binom{n}{p} = C_{n,p}$$

onde $C_{n,p}$ representa o números de combinações de n objetos distintos, tomados p por vez.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Calcule $\binom{6}{5}$.

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{5!.(6-5)!} = \frac{6!}{5!.1!} = \frac{6.5!}{5!.1!} = \frac{6}{1} = 6 .$$

Exemplo 2: Calcule $\binom{4}{1}$.

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!.(4-1)!} = \frac{4!}{1!.3!} = \frac{4.3!}{1!.3!} = \frac{4}{1!} = \frac{4}{1} = 4 .$$

Exemplo 3: Calcule $C_{4,4}$.

$$C_{4,4} = \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!.(4-4)!} = \frac{4!}{4!.0!} = \frac{4!}{4!.1} = 1.$$

Exemplo 4: Quantas combinações podem ser feitas com 4 objetos distintos, tomados 2 por vez?

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!.(4-2)!} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2!}{2!.2!} = \frac{4.3}{2!} = \frac{12}{2.1} = \frac{12}{2} = 6,$$

ou seja, é possível formar 6 combinações (ou 6 conjuntos) com 4 elementos, tomados 2 por vez.

Em outras palavras, considere 4 elementos A, B, C e D. É possível formar 6 conjuntos com 2 elementos; são eles: $\{A,B\}$, $\{A,C\}$, $\{A,D\}$, $\{B,C\}$, $\{B,D\}$, $\{C,D\}$.

Observação: Na combinação de objetos, a ordem em que os elementos estão colocados não importa, isto significa que a combinação $\{A,B\}$ é a mesma $\{B,A\}$. Além disso, os conjuntos devem ter elementos distintos, ou seja, nesse caso, $\{A,A\}$ não representa uma combinação.

3. BINÔMIO DE NEWTON

Seja n um número natural, o binômio da forma $(p+q)^n$ é denominado Binômio de Newton. Assim, para:

$n = 0$ então $(p+q)^0 = 1$

$n = 1$ então $(p+q)^1 = p + q$

$n = 2$ então $(p+q)^2 = (p+q)(p+q)$

$$= p \cdot p + p \cdot q + q \cdot p + q \cdot q$$

$$= p^2 + 2p \cdot q + q^2,$$

ou seja,

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 .$$

$n = 3$ então $(p+q)^3 = (p+q)(p+q)(p+q)$

$$= (p+q)(p^2 + 2p\cdot q + q^2)$$

$$= p\cdot p^2 + p\cdot 2p\cdot q + p\cdot q^2 + q\cdot p^2 + q\cdot 2p\cdot q + q\cdot q^2$$

$$= p^3 + 2p^2\cdot q + p\cdot q^2 + q\cdot p^2 + 2p\cdot q^2 + q^3$$

$$= p^3 + (2p^2\cdot q + q\cdot p^2) + (p\cdot q^2 + 2p\cdot q^2) + q^3$$

$$= p^3 + 3p^2\cdot q + 3p\cdot q^2 + q^3 ,$$

ou seja,

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 .$$

Para n, um número natural qualquer é possível deduzir a fórmula geral do binômio $(p+q)^n$, dada por

$$(p+q)^n = \underbrace{\binom{n}{0}p^nq^0}_{1^0 \text{ termo}} + \underbrace{\binom{n}{1}p^{n-1}q^1}_{2^0 \text{ termo}} + \underbrace{\binom{n}{2}p^{n-2}q^2}_{3^0 \text{ termo}} + \underbrace{\binom{n}{3}p^{n-3}q^3}_{4^0 \text{ termo}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}p^0q^n}_{(n+1)-\text{ésimo termo}}$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: $(p+q)^2 = \binom{2}{0}p^2q^0 + \binom{2}{1}p^1q^1 + \binom{2}{2}p^0q^2$

$$= \frac{2!}{0!(2-0)!}p^2.1 + \frac{2!}{1!(2-1)!}pq + \frac{2!}{2!(2-2)!}1.q^2$$

$$= \frac{2!}{\underbrace{0!}_{1}2!}p^2 + \frac{2!}{1!1!}pq + \frac{2!}{2!\underbrace{0!}_{1}}q^2$$

$$= p^2 + 2pq + q^2 .$$

Exemplo 2: $(p+q)^4 = \binom{4}{0}p^4q^0 + \binom{4}{1}p^3q^1 + \binom{4}{2}p^2q^2 + \binom{4}{3}p^1q^3 + \binom{4}{4}p^0q^4$

$$= \frac{4!}{0!(4-0)!}p^4.1 + \frac{4!}{1!(4-1)!}p^3q + \frac{4!}{2!(4-2)!}p^2q^2 + \frac{4!}{3!(4-3)!}pq^3 + \frac{4!}{4!(4-4)!}1.q^4$$

$$= \frac{4!}{\underbrace{0!}_{1}4!}p^4 + \frac{4!}{1!3!}p^3q + \frac{4!}{2!2!}p^2q^2 + \frac{4!}{3!1!}pq^3 + \frac{4!}{4!\underbrace{0!}_{1}}q^4$$

$$= p^4 + \frac{4.3!}{3!}p^3q + \frac{4.3.2!}{2!2!}p^2q^2 + \frac{4.3!}{3!}pq^3 + q^4$$

$$= p^4 + 4p^3q + \frac{4.3}{2!}p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

$$= p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4 .$$

Observação: p e q podem ser substituídos por números ou por outras letras, vejamos um exemplo.

Exemplo 3: $(x-2)^3 = \binom{3}{0}x^3.2^0 - \binom{3}{1}x^2.2^1 + \binom{3}{2}x^1.2^2 - \binom{3}{3}x^0.2^3$

$$= \frac{3!}{0!(3-0)!}x^3.1 - \frac{3!}{1!(3-1)!}2x^2 + \frac{3!}{2!(3-2)!}4x - \frac{3!}{3!(3-3)!}1.8$$

$$= \frac{3!}{\underbrace{0!}_{1}3!}x^3 - \frac{3!}{1!2!}2x^2 + \frac{3!}{2!1!}4x - \frac{3!}{3!\underbrace{0!}_{1}}8$$

$$= x^3 - \frac{3.2!}{2!}2x^2 + \frac{3.2!}{2!}4x - 8$$

$$= x^3 - 3.2x^2 + 3.4x - 8$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8\,.$$

3.1. FÓRMULA DO TERMO GERAL

A fórmula para obtenção de um termo geral no binômio $(p+q)^n$ tem a forma

$$t_{r+1} = \binom{n}{r} p^{n-r} q^r$$

onde $r+1$ é a posição do termo. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4: Calcular o 4º termo no desenvolvimento do binômio $(x-2)^7$.

Nesse caso,

$$n = 7 \qquad p = x \qquad q = -2\,.$$

Como queremos calcular o 4º termo, então:

$$r + 1 = 4 \qquad r = 3\,.$$

Desta forma,

$$t_4 = \binom{7}{3} x^{7-3} (-2)^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} x^4 (-8) = \frac{7!}{3!4!} x^4 (-8) = \frac{7.6.5.4!}{3!4!} x^4 (-8)$$

o que significa que:

$$t_4 = \frac{7.6.5}{3!} x^4 (-8) = \frac{7.6.5}{3.2.1} x^4 (-8) = \frac{210}{6} x^4 (-8) = 35x^4 (-8)$$

resultando que:

$$t_4 = -280\,x^4\,.$$

3.2. TRIÂNGULO DE PASCAL

Blaise Pascal (1623-1662) foi um importante matemático francês. Entre suas pesquisas destacam-se suas contribuições na formulação da teoria da probabilidade. Pascal não foi o primeiro a trabalhar com o triângulo aritmético, hoje conhecido como “triângulo de Pascal”, porém, esse nome surgiu em razão das aplicações feitas por Pascal referentes a várias propriedades que o triângulo possui.

O triângulo é formado por linhas e números binomiais, na forma mostrada a seguir:

$\binom{0}{0}$ Linha zero

$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ Linha 1

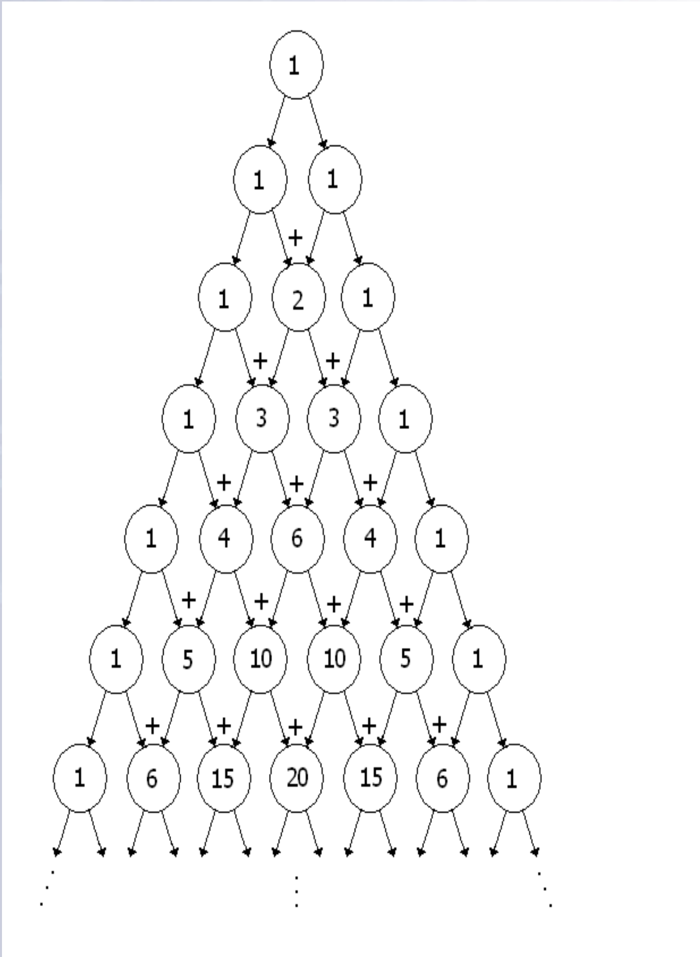
$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$ Linha 2

$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$ Linha 3

$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$ Linha 4

$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$ Linha 5

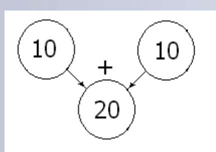
$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$ Linha 6



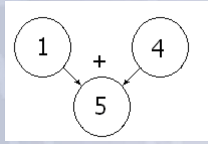
E continua...

Note que o triângulo é composto por linhas. O primeiro e o último número de cada linha é o número 1. Os demais elementos correspondem à soma dos dois elementos, imediatamente, acima deles.

Exemplo 5: Na linha 6, o número 20 corresponde a soma 10+10;



Exemplo 6: Na linha 5, o número 5 corresponde a soma 1+4;



Considerando a fórmula geral do binômio podemos obter os dados descritos na tabela a seguir, que resume o binômio e sua respectiva expansão.

Binômio	Equação expandida
$(a+b)^0$	$1\,a^0b^0$
$(a+b)^1$	$1\,a^1b^0 + 1\,a^0b^1$
$(a+b)^2$	$1\,a^2b^0 + 2\,a^1b^1 + 1\,a^0b^2$
$(a+b)^3$	$1\,a^3b^0 + 3\,a^2b^1 + 3\,a^1b^2 + 1\,a^0b^3$
$(a+b)^4$	$1\,a^4b^0 + 4\,a^3b^1 + 6\,a^2b^2 + 4\,a^1b^3 + 1\,a^0b^4$
$(a+b)^5$	$1\,a^5b^0 + 5\,a^4b^1 + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,a^1b^4 + 1\,a^0b^5$
$\vdots$	$\vdots$

Outra forma de forma de obter a equação expandida seria através do triângulo de Pascal. Observe que os coeficientes na tabela (em azul) coincidem com os elementos do triângulo de Pascal. Vejamos um exemplo.

Exemplo 7: Desenvolver a expressão $(p+q)^4$, a partir do triângulo de Pascal.

Como o expoente na expressão é 4, então, os coeficientes correspondem à linha 4 do triângulo de Pascal. Não esqueça que a primeira linha é chamada linha zero. Assim,

$$(p+q)^4 = 1\,p^4 + 4\,p^3q + 6\,p^2q^2 + 4\,pq^3 + 1\,q^4$$

onde 1, 4, 6, 4 e 1 representam, nessa ordem, os coeficientes da expressão expandida.

Bibliografia

Medeiros, V. Z., Caldeira, A. M., Silva, L. M. O., Machado, M. A. S. **Pré-cálculo**, Editora Thomson, . 1 ed. São Paulo, 2006.

Spiegel, M. R., Moyer, R. E. **Álgebra**, Coleção Schaum, Editora Bokman, 2 ed. São Paulo, 2003.