Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF

Edital 15 – CAPES

Matemática Básica
Para Ciências Sociais II

INTERPOLAÇÃO

Prof. Antônio Maurício Medeiros Alves
Profª Denise Maria Varella Martinez

UNIDADE 3 – INTERPOLAÇÃO

1. INTRODUÇÃO

A interpolação é uma técnica de aproximação de dados ou funções bastante utilizada e se aplica as seguintes situações:

a) quando a expressão (lei de associação) da função não é conhecida, porém possuímos um conjunto de valores obtido, por exemplo, através de dados experimentais;

b) quando é difícil calcular o valor da função, devido a complexidade da lei que a define.

Nesta unidade estudaremos a interpolação de funções focando o interesse na primeira situação, citada anteriormente.

Considere um conjunto com n+1 elementos relacionados, da seguinte forma

$$(x_0, f(x_o)),\ (x_1, f(x_1)),\ (x_2, f(x_2)),\ \ldots,\ (x_n, f(x_n))$$

onde a lei que define a função $f(x)$ não é conhecida.

Queremos obter, por exemplo, $f(\bar{x})$ onde $\bar{x} \neq x_0$, $\bar{x} \neq x_1$ $\bar{x} \neq x_2$,..., $\bar{x} \neq x_n$, tal que $\bar{x} \in [x_0, x_n]$. Podemos representar $f(x)$ por meio de um polinômio $p_n(x)$ tal que

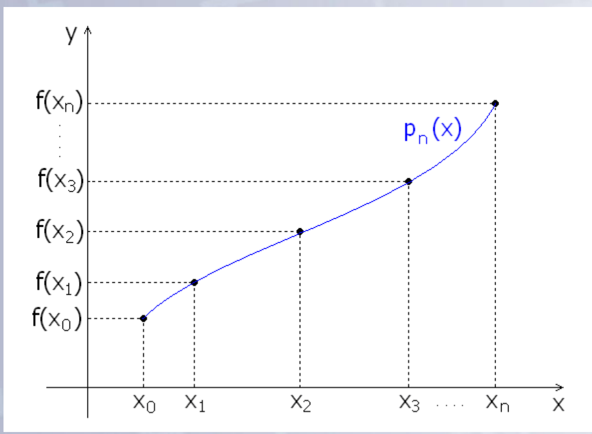
$$p_n(x_i) = f(x_i), \text{ para todo } \ i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Desta forma podemos estimar $f(\bar{x})$ através de $p_n(\bar{x})$, ou seja,

$$f(\bar{x}) \cong p_n(\bar{x})$$

Observação: o símbolo $\cong$ indica que se trata de um valor aproximado.

Graficamente



2. INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

O objetivo na interpolação polinomial é determinar um polinômio da forma

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

tal que $p_n(x_i) = f(x_i)$, para todo $i = 0,1,2,\ldots,n$. O polinômio $p_n(x)$ é chamado polinômio interpolador. A seguir vamos obter o polinômio interpolador através da resolução de um sistema linear.

2.1 INTERPOLAÇÃO LINEAR A PARTIR DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Para obter um polinômio $p_n(x)$ que interpola n+1 pontos conhecidos $(x_i, f(x_i))$, para todo $i = 0,1,2,\ldots,n$, devemos ter:

$$p_n(x_i) = f(x_i), \text{ para todo } i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Como $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ então

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}.$$

Resolvendo-se o sistema obtém-se os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ do polinômio $p_n(x)$.

Observação: Quando o polinômio interpolador tem a forma $p_1(x) = a_1 x + a_0$ (grau um) a interpolação é dita interpolação linear.

Exemplo 1: Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos $(0,-1)$ e $(4,11)$. Determinar, por interpolação linear, o valor aproximado de $f(1)$.

Como a interpolação é linear, o polinômio interpolador é de grau um e tem a forma:

$p_1(x) = a_1 x + a_0$.

Como $p_1(0) = f(0) = -1$ e $p_1(4) = f(4) = 11$ tem-se que

$p_1(0) = a_1.0 + a_0 = -1$

$p_1(4) = a_1.4 + a_0 = 11$.

Desta forma precisamos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} 0.a_1 + a_0 = -1 \\ 4a_1 + a_0 = 11 \end{cases}.$$

Da primeira equação do sistema temos que $a_0 = -1$. Da segunda equação resulta que

$$4a_1 - 1 = 11 \quad \Rightarrow \quad 4a_1 = 11 + 1 \quad \Rightarrow \quad 4a_1 = 12 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3.$$

Logo

$p_1(x) = 3x - 1$.

Como queremos calcular $f(1)$, vamos calcular $p_1(1)$.

$p_1(1) = 3.1 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Portanto 2 é um valor aproximado para $f(1)$. Lembre-se que é um <u>valor aproximado</u> em razão de que a lei que define a função f é desconhecida.

Além do método de interpolação através da resolução de um sistema linear (citado anteriormente), existem outras formas para obter o polinômio interpolador, conhecidas como formas de Lagrange e de Newton. Na seqüência do texto estudaremos a forma de Newton para interpolação polinomial.

2.2. FORMA DE NEWTON

Considere $x_0, x_1, \ldots, x_n$, pontos distintos. A forma de Newton consiste em determinar o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ através dos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tal que

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0).(x - x_1) + \\ & + f[x_0, x_1, x_2, x_3].(x - x_0).(x - x_1).(x - x_2) + \ldots + \\ & + f[x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n].(x - x_0).(x - x_1).(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

onde $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_2]$,..., $f[x_0, x_1, x_2, x_{n-1}]$ são constantes obtidas a partir dos pontos conhecidos, chamadas operadores diferenças divididas. A seguir vejamos como determinar essas constantes.

2.2.1 DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Considere o conjunto de pontos distintos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, os operadores diferenças divididas são definidos da seguinte forma:

$$f[x_0] = f(x_0) \qquad \text{ordem zero}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \qquad \text{ordem 1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \qquad \text{ordem 2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \qquad \text{ordem 3}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \qquad \text{ordem n}$$

De forma genérica podemos escrever:

$$f[x_i] = f(x_i), \; i = 0,1,2,\dots,n$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \; i = 0,1,2,\dots,n-1 .$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \; i = 0,1,2,\dots,n-2 .$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i}, \; i = 0,1,2,\dots.,n-3 .$$

$$\vdots$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_0}, \; i = 0 .$$

$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ é chamada de diferença dividida de ordem k da função $f(x)$ sobre os k+1 pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_k$.

Portanto, dada uma função $f(x)$ tal que são conhecidos os valores $(x_i, f(x_i))$ para $i = 0,1,2,3,\dots,n$, pode-se organizar as diferenças divididas na seguinte tabela:

X	ordem 0	ordem 1	ordem 2	ordem 3	…	ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$\ddots$	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$		
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$			$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$

		$f[x_3,x_4]$		$\vdots$	
x_4	$f[x_4]$		$\vdots$		$\iddots$
		$\vdots$		$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	
$\vdots$	$\vdots$		$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$		
		$f[x_{n-1},x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Observe que os elementos circulados na tabela são aqueles que aparecem na expressão

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0).(x-x_1) +$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3].(x-x_0).(x-x_1).(x-x_2) + \ldots + \qquad .$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n].(x-x_0).(x-x_1).(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2: Considere a função $f(x)$, tabelada a seguir. Usando a forma de Newton, determine o polinômio que interpola $f(x)$ nos pontos dados e o valor aproximado de $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

x	1	5	8
$f(x)$	3	19	-11

A tabela de diferenças divididas é:

X	ordem 0	ordem 1	ordem 2
1	3		
		$\frac{19-3}{5-1} = \frac{16}{4} = 4$	

5	19	$\frac{-10-4}{8-1} = \frac{-14}{7} = -2$
	$\frac{-11-19}{8-5} = \frac{-30}{3} = -10$	
8	-11	

O polinômio interpolador tem a forma:

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\ (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\ (x - x_0)(x - x_1)$$

Portanto o polinômio que interpola $f(x)$ é:

$$p_2(x) = 3 + 4\ (x-1) - 2\ (x-1)(x-5)$$

ou seja,

$$p_2(x) = 3 + 4\ (x-1) - 2\ (x-1)(x-5).$$ polinômio interpolador

O valor aproximado de $f\left(\frac{5}{2}\right)$ é $p_2\left(\frac{5}{2}\right)$. Assim tem-se que:

$$p_2\left(\frac{5}{2}\right) = 3 + 4\left(\frac{5}{2} - 1\right) - 2\left(\frac{5}{2} - 1\right)\left(\frac{5}{2} - 5\right) = 3 + 4\left(\frac{5-2}{2}\right) - 2\left(\frac{5-2}{2}\right)\left(\frac{5-10}{2}\right)$$

$$p_2\left(\frac{5}{2}\right) = 3 + 4\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$p_2\left(\frac{5}{2}\right) = 3 + \left(\frac{12}{2}\right) - \left(\frac{2.3.(-5)}{2.2}\right) = 3 + 6 + \frac{15}{2} = 9 + \frac{15}{2} = \frac{18+15}{2} = \frac{33}{2}.$$

Ou ainda

$$f\left(\frac{5}{2}\right) \cong \frac{33}{2}.$$

Exemplo 3: Considere a função $f(x)$, tabelada a seguir. Usando a forma de Newton, determine o polinômio que interpola $f(x)$ nos pontos dados e o valor aproximado de $f(0{,}1)$.

x	-2	0	6	8	9
$f(x)$	1	11	137	-269	254

A tabela de diferenças divididas é:

2	ordem 0	ordem 1	ordem 2	ordem 3	ordem 4
-2	1				
		$\frac{11-1}{0-(-2)}=5$			
0	11		$\frac{21-5}{6-(-2)}=2$		
		$\frac{137-11}{6-0}=21$		$\frac{-28-2}{8-(-2)}=-3$	
6	137		$\frac{-203-21}{8-0}=-28$		$\frac{30-(-3)}{9-(-2)}=3$
		$\frac{-269-137}{8-6}=-203$		$\frac{242-(-28)}{9-0}=30$	
8	-269		$\frac{523-(-203)}{9-6}=242$		
		$\frac{254-(-269)}{9-8}=523$			
9	254				

O polinômio interpolador tem a forma:

$$
\begin{aligned}
p_4(x) = {} & f[x_0] + f[x_0, x_1]\ (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\ (x - x_0)(x - x_1) + \\
& + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\
& + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)
\end{aligned}
$$

Portanto o polinômio que interpola $f(x)$ é:

$$p_4(x) = 1 + 5\,(x-(-2)) + 2\,(x-(-2))(x-0) + \\ + (-3)\,(x-(-2))(x-0)(x-6) + 3\,(x-(-2))(x-0)(x-6)(x-8)$$

$$p_4(x) = 1 + 5.\,(x+2) + 2.\,(x+2).x + \\ -3.\,(x+2).x.\,(x-6) + 3.\,(x+2).x.(x-6).(x-8).$$

polinômio interpolador

O valor aproximado de $f(0{,}1)$ é $p_4(0{,}1)$. Assim tem-se que:

$$p_4(0{,}1) = 1 + 5.(0{,}1+2) + 2.(0{,}1+2).(0{,}1) + \\ -3.(0{,}1+2).(0{,}1).(0{,}1-6) + 3.(0{,}1+2).(0{,}1).(0{,}1-6).(0{,}1-8)$$

$$p_4(0{,}1) = 1 + \underbrace{5.(2{,}1)}_{10{,}5} + \underbrace{2.(2{,}1).(0{,}1)}_{0{,}42} - \underbrace{3.(2{,}1).(0{,}1).(-5{,}9)}_{3{,}717} + \underbrace{3.(2{,}1).(0{,}1).(-5{,}9).(-7{,}9)}_{29{,}3643}$$

$$p_4(0{,}1) = 1 + 10{,}5 + 0{,}42 + 3{,}717 + 29{,}3643$$

$$p_4(0{,}1) = 45{,}0013.$$

Ou ainda

$$f(0{,}1) \cong 45{,}0013.$$

Observação: Se os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ estão igualmente espaçados significa que estamos em presença de um caso particular. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4: Considere a função $f(x)$, tabelada a seguir. Usando diferenças divididas, determine o polinômio que interpola $f(x)$ nos pontos dados e o valor aproximado de $f(85)$.

X	50	70	90
$f(x)$	60	100	940

A tabela de diferenças divididas é:

x	ordem 0	ordem 1	ordem 2
50	60		
		$\frac{100-60}{70-50}=\frac{40}{20}=2$	
70	100		$\frac{42-2}{90-50}=\frac{40}{40}=1$
		$\frac{940-100}{90-70}=\frac{840}{20}=42$	
90	940		

O polinômio interpolador tem a forma:

$$p_2(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1]\,(x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2]\,(x-x_0)(x-x_1)$$

Portanto o polinômio que interpola $f(x)$ é:

$$p_2(x)=60+2\,(x-50)+1\,(x-50)(x-70)$$ polinômio interpolador

O valor aproximado de $f(85)$ é $p_2(85)$. Assim tem-se que:

$$p_2(x)=60+2.(85-50)+1.(85-50).(85-70)$$

$$p_2(x)=60+2.(35)+1.(35).(15)$$

$$p_2(x)=60+70+525=655\ .$$

Ou ainda

$$f(85)\cong 655\ .$$

3. ERRO NA INTERPOLAÇÃO

Além dos erros de arredondamento, ao se aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau $\leq n$, comete-se um erro $E_n(x)$ tal que

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

para todo x no intervalo $[x_0, x_n]$.

Neste momento, não será feito um estudo detalhado sobre erros, tendo em vista a necessidade do conhecimento de alguns conceitos matemáticos ainda não estudados.

Bibliografia

Barroso, L. C., Barroso, M. M. A., Campos Filho, F. F., Carvalho, M. L. B., Maia, M. L **Cálculo Numérico**, Editora Harbra, 1 ed. São Paulo, 1983.

Gomes, S. C. P. **Métodos Numéricos: Teoria e Programação**, Editora da Furg, 1 ed. Rio Grande, 1999.

Moraes, D., Marins, J. M. **Cálculo Numérico Computacional, Teoria e Pratica**, Editora Atlas, 2 ed. São Paulo, 1994.

Ruggiero, M. A. G., Lopes, V. L. R. **Cálculo Numérico, Aspectos Teóricos e Computacionais**, Ed. Makron Books, 2 ed. São Paulo, 1996.