MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NA SALA DE AULA

PRODUTO EDUCACIONAL

TATIANE ALINE RODRIGUES KAYSER
RENE CARLOS CARDOSO BALTAZAR JUNIOR
(ORIENTADOR)

FURG CAMPUS SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA
PPGECE
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Ficha Catalográfica

K23p Kayser, Tatiane Aline Rodrigues.
Probabilidade geométrica na sala de aula: produto educacional [Recurso Eletrônico] / Tatiane Aline Rodrigues Kayser. – Santo Antônio da Patrulha, RS: FURG, [2023].
18 f. : il. color.

Produto Educacional da Dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob a orientação do Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior.
Disponível em: https://ppgece.furg.br/
https://educapes.capes.gov.br/

1. Ensino de Probabilidade 2. Geometria 3. Problemas probabilísticos 4. Problema do Macarrão I. Baltazar Junior, Rene Carlos Cardoso II. Título.

CDU 37:519.1

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

APRESENTAÇÃO

O presente produto educacional, **Probabilidade Geométrica na Sala de Aula**, apresenta a Probabilidade Geométrica através de problemas que fomentam atividades diversas envolvendo a Probabilidade e a Geometria. Sua origem está no trabalho de mestrado cujo título é Probabilidade Geométrica: contribuições para o ensino de Matemática na Educação Básica.

A Probabilidade Geométrica é uma área de estudo da Teoria das Probabilidades que explora situações probabilísticas com espaços amostrais contínuos que estimam a probabilidade de um determinado evento ocorrer por meios geométricos, como cálculos de comprimento, área e volume.

Então, as propostas de atividades aqui descritas buscam desenvolver conceitos probabilísticos e geométricos, explorando as resoluções matemáticas, experimentações e estimulando a elaboração de argumentos baseados na interpretação e compreensão das situações. A contextualização desses problemas é descrita como um subsídio para acrescentar conhecimentos à prática de ensino.

Essas atividades são desenvolvidas na perspectiva da metodologia das investigações matemáticas que, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), indicam que “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Ao investigar, o aluno é convidado a agir como um matemático e buscar a solução do problema não é o único objetivo; compreender os processos, formular e comprovar conjecturas, comunicando suas conclusões, auxiliam o ensino e a aprendizagem do aluno, que se torna sujeito ativo na sala de aula.

Para o desenvolvimento das atividades serão utilizados materiais comuns à sala de aula, além de outros, como espaguete (macarrão) e o software GeoGebra. É importante destacar que este é um software livre, que pode ser acessado por meio eletrônico através de computadores, celulares e tablets, considerando a realidade que o professor encontra na escola.

Atenciosamente,

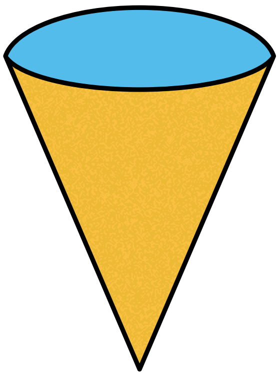
TATIANE ALINE RODRIGUES KAYSER

SUMÁRIO

1. PROBABILIDADE

A Probabilidade é o estudo do acaso, dos fenômenos aleatórios. Através dela, é possível analisar as chances de um determinado evento ocorrer.

O conceito de acaso abre caminho para a diferenciação entre fenômenos aleatórios e determinísticos. Coutinho (2007) cita o exemplo do cone perfeito, de Poincaré (1912).



Considerando um cone equilibrado sobre a sua ponta, se o cone for simétrico e não sofrer outras forças além do peso, ele não cairá. No entanto, qualquer pequena imperfeição na simetria ou uma perturbação mínima, como uma leve vibração ou um sopro de ar, fará com que o cone se incline e caia.
Assim, Poicaré (1912, apud COUTINHO, 2007) argumenta uma causa muito pequena que nos escapa, determina um efeito considerável que não podemos não ver, e então diremos que este efeito é devido ao acaso.

Lembrando alguns conceitos de Probabilidade:

Experimentos aleatórios são aqueles que não é possível controlar e assegurar o valor de certas variáveis

O **espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento aleatório

Evento é um subconjunto do espaço amostral, ou seja, um subconjunto de casos possíveis

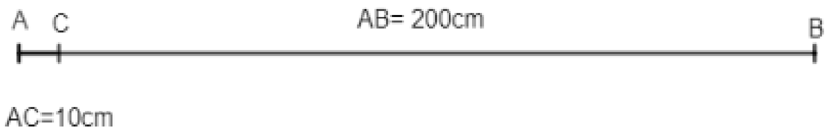
$$P(A) = \frac{\textit{número de elementos do evento A}}{\textit{número de elementos do espaço amostral}}$$

2. PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

> Alguns problemas de probabilidades são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nos modelos em apreço, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação ou ao seu limite, caso exista entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimento, área ou volume (TUNALA, 1992, p. 16).

Um exemplo é: qual a probabilidade de, em uma corda de comprimento 2 m, um ponto pertencer exatamente aos 10 cm iniciais?
A solução é: Efetuada a conversão dos dados para a mesma unidade de medida, se tem a representação gráfica na Figura 1.

Figura 1 - Representação gráfica de segmento AB



Assim, a probabilidade pedida é a de um ponto do segmento AB, de 200 cm, pertencente ao segmento AC, de 10 cm. Logo:

$$p(AC) = \frac{Medida\ do\ Comprimento\ AC}{Medida\ do\ Comprimento\ AB}$$

$$p(AC) = \frac{10}{200}$$

$$p(AC) = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Para saber mais, consulte a dissertação **Probabilidade Geométrica: contribuições para o Ensino de Matemática na Educação Básica** (KAYSER, 2023)

3. PROBLEMA DO MACARRÃO
CONTEXTUALIZANDO A QUESTÃO

O Problema do Macarrão é uma questão envolvendo Probabilidade Geométrica que foi proposta pelo professor Wagner em um curso para professores no IMPA em 1994, de acordo com o próprio autor e posteriormente publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM 34) em 1997.

Wagner (1997) relata que o experimento consistiu em distribuir espaguetes para os sessenta professores presentes e solicitar que partissem o espaguete, ao acaso, em três pedaços. Na sequência, pediu que os professores verificassem se formariam triângulos com os três pedaços. Dentre os sessenta professores, quarenta e um conseguiram formar triângulos, estimando a probabilidade de formar triângulo em 0,68.

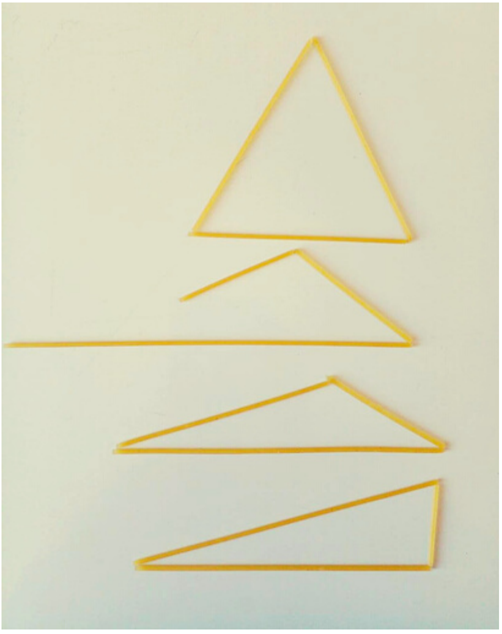
Embora os sessenta experimentos sejam um espaço amostral relativamente pequeno para se confiar, na ocasião a opinião geral é que a resposta correta estava próxima do valor calculado. O enunciado do problema é:

Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

Este contexto é o ponto de partida para o presente trabalho e seus desdobramentos. O problema ficou conhecido como Problema do Macarrão e sua solução ocorre por meio da Probabilidade Geométrica, uma área da teoria das Probabilidades que analisa e resolve problemas probabilísticos utilizando entes geométricos.

Na sua resolução, além de aplicar conceitos de Probabilidade, usaremos recursos geométricos, no caso a desigualdade triangular. Como é de suma importância para compreender o caminho para solução deste problema, a temática tem um tópico específico para seu desenvolvimento e compreensão.

Figura 1 - Formação de triângulos com macarrão



Fonte: Elaborado pela autora (2022).

4. FORMANDO TRIÂNGULOS
PROPOSTA DE ATIVIDADE - PARTE 1

Objetivo: Explorar situações problemas, reconhecendo a condição de existência de um triângulo quanto à medida de seus lados.

Tempo Estimado: 3 horas/aula

Desenvolvimento da atividade:

- Professor fará os combinados iniciais da aula, explicando que realizarão uma atividade investigativa.

- Reproduzir o experimento do macarrão: Distribuir espaguetes aos alunos, solicitar que os alunos partam em três partes, ao acaso. E posteriormente verificar se as três partes formam triângulos. Anotar o resultado do experimento (espera-se que alguns segmentos formem triângulo e outros não, observe a Figura 1).

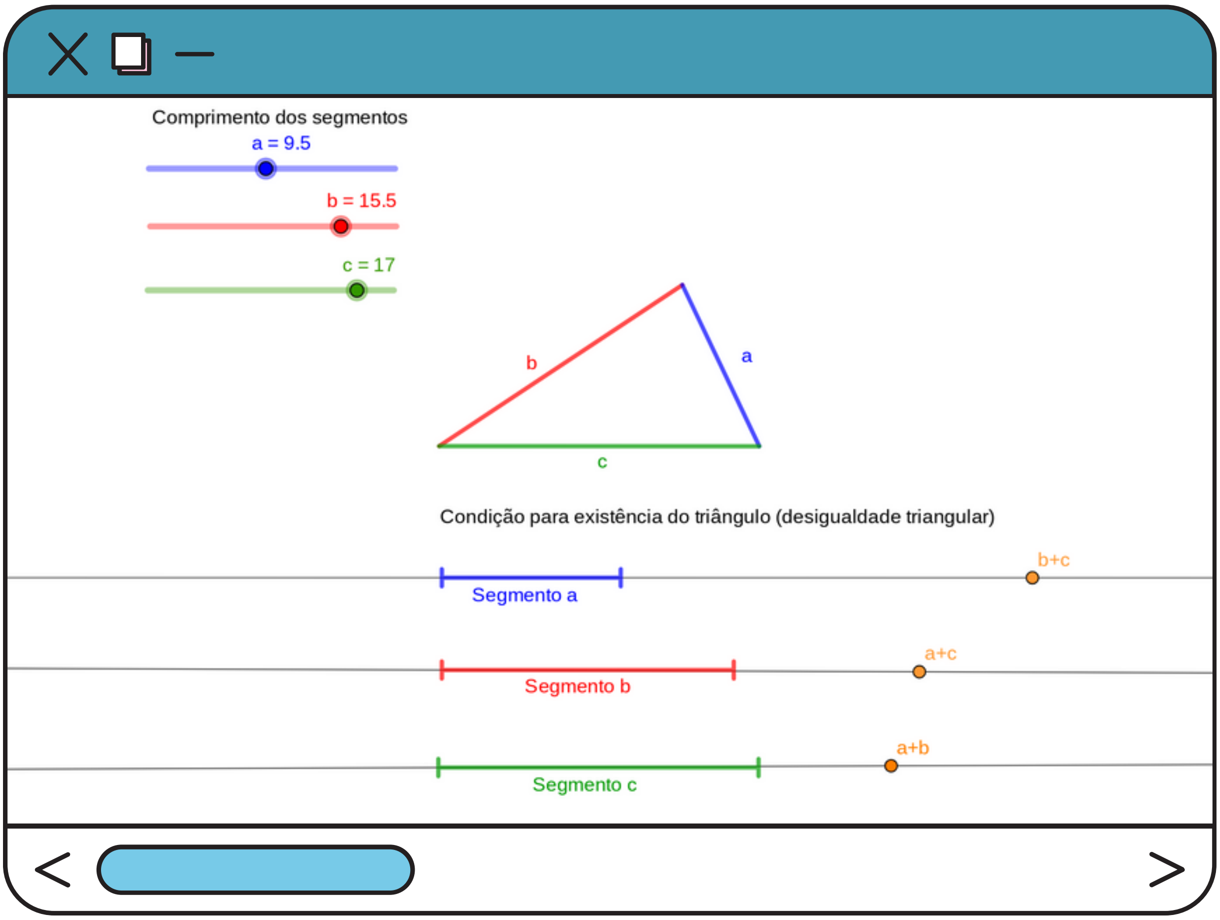
DIVIDINDO UM MACARRÃO, AO ACASO, EM TRÊS PARTES, SEMPRE É POSSÍVEL FORMAR UM TRIÂNGULO?

- Neste primeiro momento o diálogo inicial entre professor e alunos é importante, o professor pode colaborar com pequenas pistas sobre o problema.

PISTAS

1. Quaisquer medidas de lado formam um triângulo?
2. Com três segmentos sempre é possível formar triângulo?
3. Por que alguns conjuntos de segmentos não formam triângulos?
4. Há relação entre o comprimento dos segmentos para a formação do triângulo?

- Para realizar a investigação inicial, o professor disponibilizará o link para o software GeoGebra (https://www.geogebra.org/classic/w8n5pvby), com um simulador que proporciona testar os questionamentos sobre desigualdade triangular.

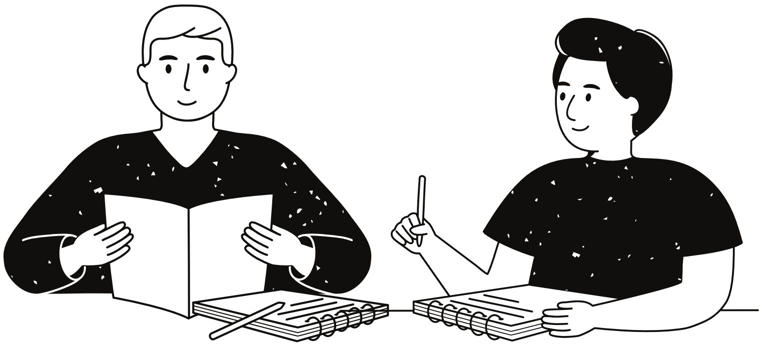


- A investigação pode ocorrer em duplas ou grupos maiores dependendo da disponibilidade de aparelhos eletrônicos para utilização do GeoGebra.

DESIGUALDADE TRIANGULAR

É um tema abordado em geometria, no ensino fundamental, e aqui, através da investigação e pesquisa, buscamos a construção esse conceito. Os alunos discutirão e, através de seus argumentos, analisarão as condições para que ocorra a formação de triângulo, observando o comprimento dos segmentos que formam os lados da figura (KAYSER, 2023).

FINALIZANDO A ATIVIDADE
FORMANDO TRIÂNGULOS



- Após explorarem com o GeoGebra, construírem e testarem suas hipóteses, registrando suas percepções, os alunos serão convidados à explanarem sobre suas análises.

- Este momento é importante, pois no grande grupo ocorrerá a sistematização dos conceitos.

- No fechamento da aula é relevante a reflexão sobre o trabalho realizado.

- A avaliação ocorrerá durante toda a atividade e como subsídios o professor terá os registros feitos pelos alunos, a sistematização das ideias expostas pelos grupos e a auto avaliação do trabalho em grupo.

5. PENSANDO EM PROBABILIDADE

PROPOSTA DE ATIVIDADE - PARTE 2

Objetivo: Explorar situações probabilísticas, aplicando conceitos geométricos e específicos como eventos possíveis e favoráveis, analisando condições de aleatoriedade.

Tempo estimado: 2 horas/aula

Desenvolvimento da atividade:

- Professor retoma o problema do macarrão, considerando as conjecturas formuladas na atividade anterior, sobre condições de existência de um triângulo.

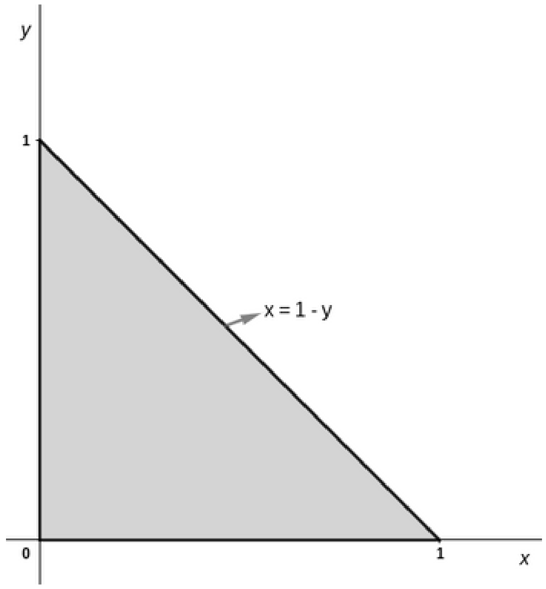
- Essa atividade deve ser adaptada pelo professor, considerando a etapa escolar do grupo de estudantes, pois o objetivo principal é o aluno discutir sobre o resultado do experimento (quebrar o espaguete em três partes) e o resultado do cálculo. Então cabe ao professor decidir se propõe a investigação a partir da resolução do cálculo ou se explanará a resolução, através de uma aula expositiva.

Resolução Matemática:

- Dado o macarrão do experimento, vamos considerá-lo como 1 unidade de comprimento.

- Dividindo o segmento em três partes, temos:

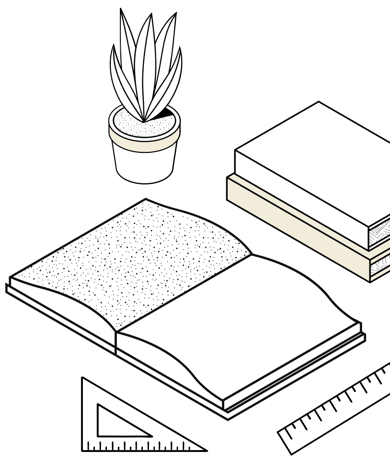
- Cada forma de dividir o segmento fica associado a um par ordenado (x,y), onde x>0, y>0 e x+y<1. Representado no plano cartesiano abaixo, temos as coordenadas que indicam todas as possibilidades de dividir o segmento em três partes.



- Na área triangular traçada temos o espaço amostral do problema. Cada divisão do segmento corresponde a um ponto, de coordenadas x e y, que estará no interior dessa região.

- Porém, não são todas as divisões que formam triângulo, como já explorado pelos alunos, temos que considerar as condições de existência do triângulo.

- Temos, portanto, que:

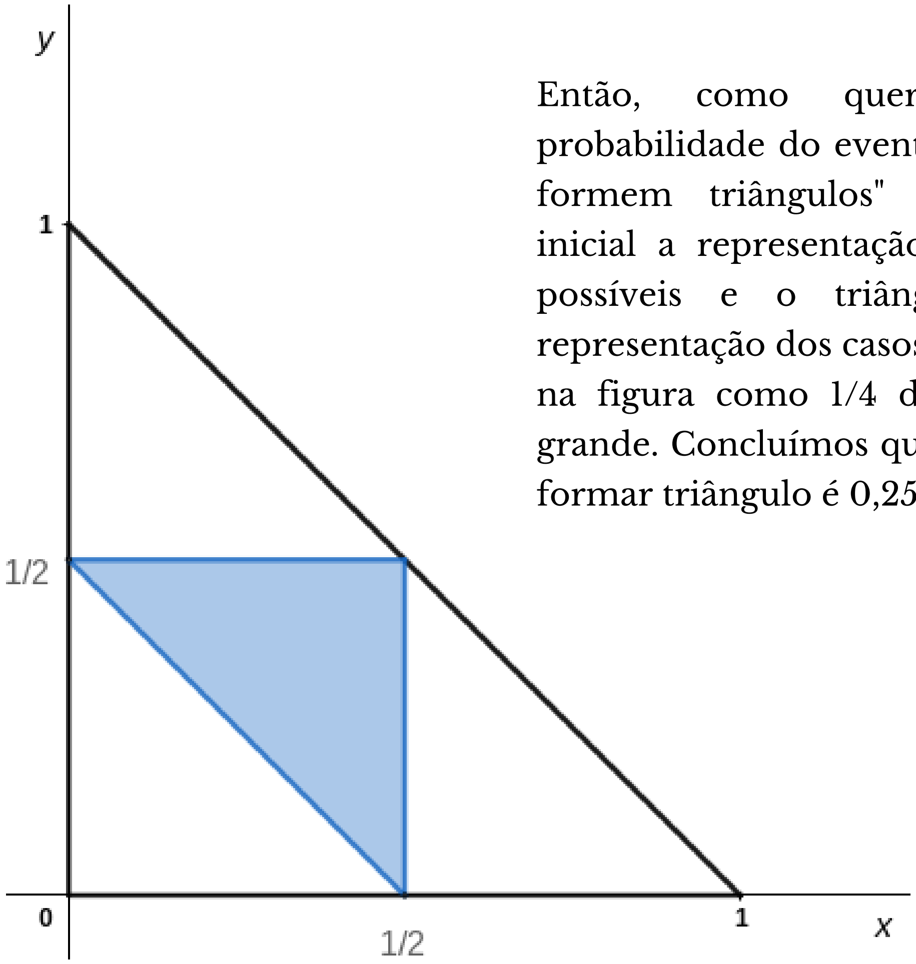


$$x < y + 1 - x - y \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$y < x + 1 - x - y \Rightarrow y < \frac{1}{2}$$

$$1 - x - y < x + y \Rightarrow x + y > \frac{1}{2}$$

- Assim, interpretando geometricamente as condições encontradas, a região sombreada no triângulo inicial é formada pelos pontos médios dos seus lados, determinamos, então, a região favorável.

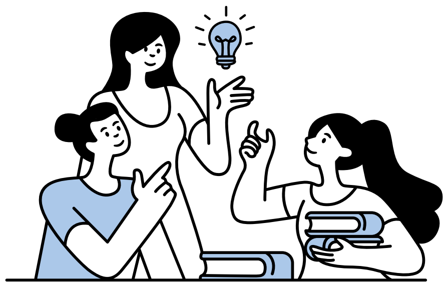


Então, como queremos calcular a probabilidade do evento "que as três partes formem triângulos" sendo o triângulo inicial a representação de todos os casos possíveis e o triângulo sombreado a representação dos casos favoráveis, expressa na figura como 1/4 da área do triângulo grande. Concluímos que a probabilidade de formar triângulo é 0,25.

PISTAS

1. Por que o experimento trouxe resultados diferentes da resolução matemática?
2. O experimento é aleatório?
3. Quais aspectos geométricos são importantes na resolução?

FINALIZANDO A ATIVIDADE
PENSANDO EM PROBABILIDADE



- A discussão com os alunos é relevante para aprimorar os conceitos, tanto de probabilidade como de geometria.
- A avaliação ocorre no decorrer da atividade e através dos relatórios escritos pelos alunos sobre o tema em questão.

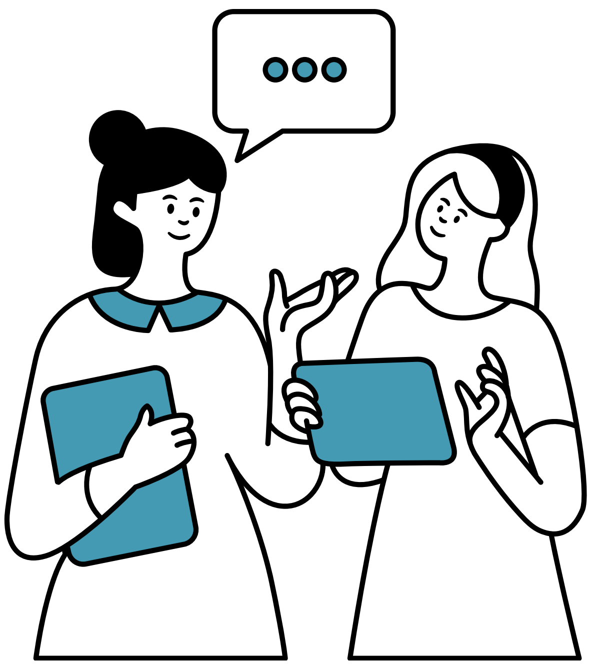
6. PROBLEMA DO CELULAR PERDIDO
CONTEXTUALIZANDO A QUESTÃO

Utilizar um aparelho celular se tornou natural na nossa sociedade. Os estudantes do Ensino Fundamental e Médio demonstram apego, por vezes, exagerado, ao aparelho e suas funcionalidades.

Na escola, por inúmeras vezes, os estudantes relatam que perderam seus celulares, demonstrando nervosismo e apreensão na busca, procurando alguém que possa auxiliar na procura, seja refazendo o trajeto ou ligando para o aparelho.

Essa situação motivou a escolha da temática para um problema de Probabilidade Geométrica que atue na introdução dos conceitos de probabilidade e que tem potencial para ser discutido por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Assim, a atividade seguinte, apresenta o problema do Celular Perdido e propõe a resolução através da análise das medidas de comprimento.



7. PROBLEMA DO CELULAR PERDIDO
PROPOSTA DE ATIVIDADE

Objetivo: Introduzir conceitos de Probabilidade e Probabilidade Geométrica através de problemas envolvendo o comprimento.

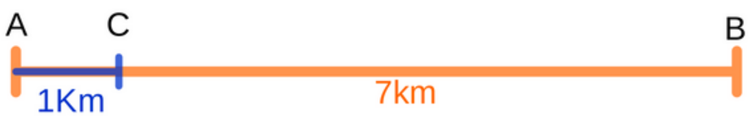
Tempo Estimado: 2 horas/aula

Desenvolvimento da atividade:

- Propor o problema, juntamente com uma imagem projetada em slides e/ou em folha fotocopiada, e solicitar que os alunos, em duplas ou trios, discutam entre si e resolvam os questionamentos.

Miguel andou de bicicleta ao longo de um caminho de 7 km e perdeu seu celular em algum local aleatório deste caminho. Diante dessa situação, questiona-se:

a. Qual é a probabilidade de que o telefone de Miguel tenha caído durante o primeiro quilômetro do percurso?



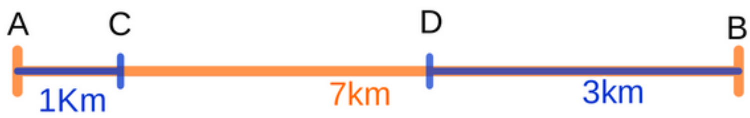
$$p(a) = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis}$$

$$p(AC) = \frac{medida\ do\ comprimento\ \ AC}{medida\ do\ comprimento\ AB} = \frac{1km}{7km} = 0,14$$

Então, a Probabilidade é de, aproximadamente, 0,14 km.

- Espera-se que os estudantes discutam e levantem hipóteses sobre a relação entre as medidas de comprimento e o espaço amostral. A representação geométrica é importante.

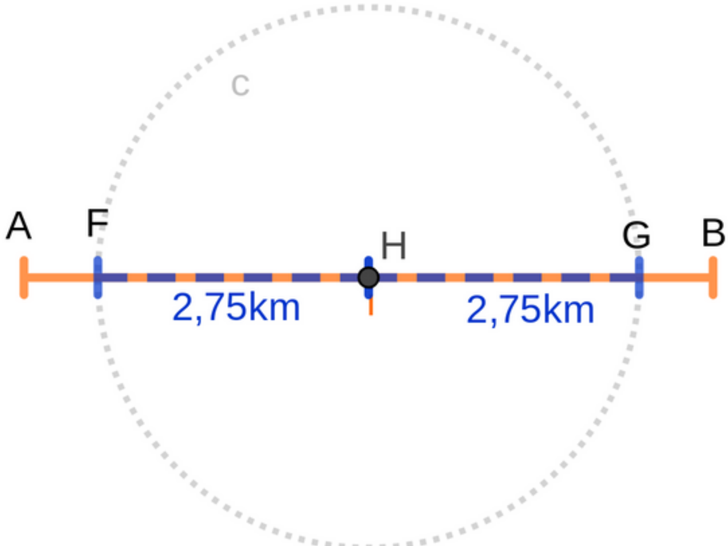
b. Determine a probabilidade de Miguel ter deixado cair o telefone durante o primeiro quilômetro ou nos últimos três quilômetros?



$$p(ACeDB) = \frac{\textit{medidas dos comprimentos } AC+DB}{\textit{medida do comprimento } AB} = \frac{4km}{7km} = 0,57$$

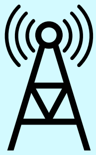
A Probabilidade é de, aproximadamente, 0,57 km.

c. Uma torre de telefonia celular está localizada no quilômetro quatro, exatamente no centro do caminho. A torre tem um alcance de 2,75 km. Se Miguel usa um segundo telefone celular para ligar para o telefone perdido, qual é a probabilidade de que o telefone perdido toque?



$$p(FG) = \frac{\textit{medida do comprimento } FG}{\textit{medida do comprimento } AB} = \frac{5{,}5\ km}{7km} = 0,78$$

PISTA



O sinal das torres de telefonia tem um alcance x que é igual ao raio da área circular.

d. Qual alcance a torre precisaria ter para que o telefone perdido certamente toque?

Esta questão sugere que os estudantes reflitam sobre as condições favoráveis para que o evento certo ocorra, ou seja, que o celular toque e seja encontrado. Para que seja possível, o raio de alcance da torre deve ser maior de 3,5 Km.

- Durante a atividade, os alunos podem recorrer a pesquisa em materiais que estão disponíveis em sala de aula, como livros didáticos e também recursos tecnológicos, como a internet.

FINALIZANDO A ATIVIDADE
PROBLEMA DO CELULAR PERDIDO

- Após responderem as questões, construindo suas conjecturas, os alunos serão convidados a compartilhar as conclusões para a turma.

- Oportunizar este momento é relevante, pois ocorrerá a sistematização dos conceitos, expondo argumentos e caminhos matemáticos utilizados na resolução confrontando com outros desenvolve o raciocínio matemático.

- A avaliação ocorrerá durante todo a atividade e como subsídios o professor terá os registros feitos pelos alunos e a sistematização das ideias expostas.

8. PARADOXO DE BERTRAND
PARA CONHECER MAIS

Joseph Louis François Bertrand foi um matemático francês que viveu no final do século XIX. Em 1907, ele formulou um problema conhecido por "Paradoxo de Bertrand", que evidencia a importância da interpretação da aleatoriedade na solução de problemas.

Na matemática, considera-se um paradoxo, um problema que vai contra o senso comum, apresentando contradições. O problema de Bertrand é um paradoxo porque a cada forma diferente de resolvê-lo, encontramos um resultado diferente. Observe o seu enunciado:

Escolhendo ao acaso uma corda de uma circunferência, qual é a probabilidade de que ela seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência?

Bertrand propõe três resoluções para o problema, preocupado com a confiabilidade da Probabilidade quando utilizados espaços amostrais infinitos. Propomos a ilustração dessas resoluções no GeoGebra, a atividade pode ser conferida no link e convidamos a propor uma atividade para sua turma sobre esse curioso problema.

Link da ilustração das soluções:

https://www.geogebra.org/m/bru6evyw

Sugestões para enriquecer sua aula:

https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5078

REFERÊNCIAS

KAYSER, Tatiane Aline Rodrigues. **Probabilidade Geométrica: Contribuições para o Ensino de Matemática na Educação Básica**. 2023. 66 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós Graduação em Ciências Exatas, Campus Santo Antonio da Patrulha, Universidade Federal do Rio Grande, Santo Antonio da Patrulha, 2023.

PONTE, J. P. do; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações Matemáticas na sala de Aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

VIDARTE, J.; CHACHAPOYAS, N.; CAVALARI, M. F. O paradoxo de Bertrand e os axiomas de Kolmogorov: uma proposta para a formação de professores. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, [S. l.], v. 8, n. 24, p. 84–103, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i24.5078. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5078. Acesso em: 7 ago. 2023.

WAGNER, E. Probabilidade Geométrica – O problema do macarrão e um paradoxo famoso. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v.34, p. 28-35, 1997. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/34/6.htm. Acesso em: 10 set. 2021.