André Meneghetti

Cinthya M. S. Meneghetti

TÓPICOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

Editora da FURG

TÓPICOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

Editora da FURG
Campus Carreiros
CEP 96203 900 – Rio Grande – RS – Brasil
editora@furg.br

André Meneghetti

Cinthya M. S. Meneghetti

TÓPICOS DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

Editora da FURG

Rio Grande

2024

2024

Designer da capa: André Meneghetti e Cinthya M. S. Meneghetti

Diagramação da capa: Murilo Borges

Formatação e diagramação final do template: André Meneghetti
Cinthya M. S. Meneghetti
João Balansin

Ficha catalográfica

M541t Meneghetti, André.
Tópicos de Transformada de *Laplace* [Recurso Eletrônico] / André Meneghetti, Cinthya M. S. Meneghetti. – Rio Grande, RS : Ed. da FURG, 2024.
65 p. : il.

Modo de acesso: http://repositório.furg.br
ISBN 978-65-5754-247-7 (eletrônico)

1. Matemática 2. Equações diferenciais 3. Teoremas de translação 4. Funções I. Meneghetti, Cinthya M. S. II. Título.

CDU 51

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos – CRB10/2344

Sumário

Prefácio

Os tópicos relacionados à Transformada de Laplace que frequentemente são estudados em cursos de Cálculo Diferencial e Integral podem variar em diferentes instituições de ensino superior. Nos cursos de Cálculo sua abordagem tem como objetivo principal introduzir uma técnica alternativa para resolver Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, quando os métodos tradicionalmente estudados nos cursos de Equações Diferenciais não se aplicam de forma direta. Este livro apresenta, na opinião dos autores, as principais definições, regras e procedimentos envolvidos no estudo da Transformada de Laplace. Observa-se que, em sua essência, o entendimento de tais procedimentos permitirá ao leitor associar as semelhanças com outros tipos de transformadas, como por exemplo, a Transformada de Fourier. Assim como pode ser observado em outras obras dos autores deste livro, a abordagem do tema destaca a presença de gráficos e ilustrações associadas, a fim de proporcionar ao leitor uma melhor compreensão da teoria e, consequentemente, mais autonomia para avançar nos estudos aplicados à Matemática, Física e Engenharias.

Conteúdo do Livro

No Capítulo 1 é apresentada a definição de Transformada de Laplace e a dedução das Transformadas Elementares. Essa denominação é atribuída à Transformada de Laplace de algumas funções, como por exemplo, as polinomiais e trigonométricas. A partir das Transformadas Elementares é possível determinar a transformação de outras funções. A seguir, define-se a Transformada Inversa de Laplace e a Transformada de uma Derivada.

No Capítulo 2 é ilustrada a técnica de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Sistemas de EDOs utilizando a Transformada de Laplace por meio de exemplos. Para auxiliar a compreensão dessa técnica são apresentados um diagrama e orientações ao leitor.

Os Teoremas de Translação permitem a transformação de funções mais complexas e são enunciados e demonstrados no Capítulo 3. Uma seção sobre a Função de Heaviside ou Função Degrau Unitário complementa este capítulo.

O Capítulo 4 discute a Derivada da Transformada de Laplace, Convolução e a forma inversa da Transformada da Convolução. A Convolução auxilia a transformação de produtos de funções, uma vez que por tratar-se de uma integral, transformar um produto de funções não é equivalente ao produto de suas transformações. Para finalizar, apresenta-se a transformada de uma Função Periódica.

Principais Características do Livro

O texto que compõe esse livro surgiu a partir de notas de aula dos autores, os quais ministram disciplinas que envolvem esse conteúdo há cerca de 15 anos. O primeiro autor é bacharel em Matemática Aplicada, mestre em Matemática Pura e doutor em Engenharia Mecânica na área de Fenômenos de Transporte. A segunda autora é licenciada em Matemática, possui mestrado e doutorado em Matemática Pura na área da Geometria Diferencial. Ambos autores possuem a preocupação de que exemplos e ilustrações acompanhem cada um dos novos conceitos introduzidos, para que o leitor consiga acompanhar a técnica por meio de diferentes representações, tanto algébricas quanto geométricas. A combinação entre a formação dos autores permite uma visão ampla, técnica e aplicada do conteúdo.

Uma vez que a inspiração inicial foi compor um material destinado à estudantes de diferentes cursos de Ciências Exatas e Engenharias, buscou-se equilibrar o formalismo e rigor matemático que as definições envolvidas possuem com exemplos. Para aqueles que desejam aprofundar a teoria (demonstrações) ou ainda a prática (exercícios) recomenda-se buscar uma bibliografia auxiliar, de acordo com os objetivos de cada um.

Para encaminhar sugestões, os leitores podem contatar os autores por email (andremeneghetti@furg.br e cinthyaschneider@furg.br) ou ainda por meio dos canais do Youtube: @andremeneghetti e @cinthyameneghetti. Bons estudos!

André Meneghetti
Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Capítulo 1

Transformada de Laplace

Em matemática, uma transformada integral $\mathcal{T}$ é uma transformação linear que associa uma função f a uma nova função, chamada de função transformada. Uma transformada integral geralmente tem a forma da Equação 1.1.

$$\mathcal{T} f(t)(u) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)K(t,u)dt. \tag{1.1}$$

No integrando, a função $K(t,u)$ é chamada de núcleo ou kernel. Diferentes transformadas integrais podem ser definidas dependendo da escolha do núcleo e dos limites de integração. É importante notar que a variável independente é alterada: se a função f inicialmente depende da variável independente t, a transformada integral elimina a variável t e constrói uma nova função que depende da variável u.

Neste texto, utilizaremos apenas a transformada integral de Laplace. Por simplicidade, a chamaremos apenas de Transformada de Laplace. O símbolo utilizado para esta transformada será $\mathcal{L}$, conforme a Definição 1.1.

Definição 1.1. Seja $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Quando a integral existir, definimos a **Transformada de Laplace** da função f conforme a Equação 1.2.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1.2}$$

A Transformada de Laplace da função f também pode ser representada por $F(s)$. Isto é,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Letra minúsculas serão utilizadas para referenciar funções originais e letras maiúsculas para referenciar as respectivas transformadas de Laplace.

Nem toda função possui Transformada de Laplace. Dizemos que uma função f tem Transformada de Laplace se a integral imprópria $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge para algum valor de s. O Teorema 1.1 enuncia condições necessárias e suficientes para que uma função f tenha Transformada de Laplace. Antes disso, é introduzida a definição de ordem exponencial, Definição 1.2.

Definição 1.2. Uma função f é dita de **ordem exponencial** c se existe uma constante positiva M tal que

$$|f(t)| \leq Me^{ct}$$

para todo $t > T$, onde $T > 0$.

Exemplo 1.1. A função $2\cos(t)$ é de ordem exponencial $c = 1$, pois tomando $M = 2$, tem-se $|2\cos(t)| \leq 2e^t$ para todo $t > T$, onde $T > 0$. Observe que

$$|2\cos(t)| \leq 2e^t \Rightarrow$$
$$-2e^t \leq \cos(t) \leq 2e^t$$

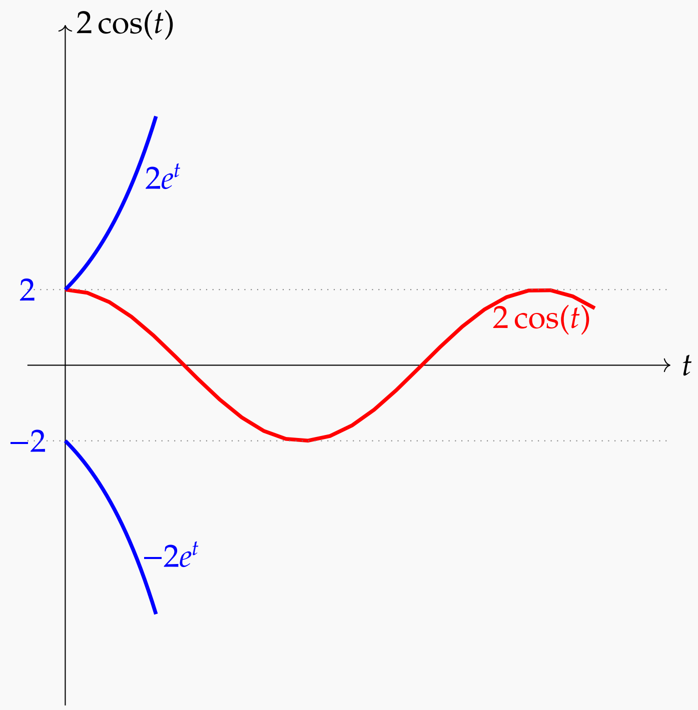

Figura 1. A função f é limitada por $2e^t$ para todo $t > T$, sendo T um número real positivo qualquer.

Teorema 1.1. Se f for contínua no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial c, então a Transformada de Laplace de f, $\mathscr{L}\{f(t)\}$, existe para $s > c$.

Prova: Como f é de ordem exponencial c, existem constantes positivas M, T tais que $\left|f(t)\right| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$. Considere $b > T$. Por definição

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \underbrace{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}_{\text{Limitado } (=L)} + \int_T^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= L + \lim_{b\to\infty}\int_T^b f(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_T^b f(t)e^{-st}dt\right| &\leq \int_T^b \left|f(t)\right| e^{-st}dt \leq \int_T^b Me^{ct}e^{-st}dt = \int_T^b Me^{-(s-c)t}dt \\ &= \left.\frac{Me^{-(s-c)t}}{-(s-c)}\right|_T^b = \underbrace{\frac{Me^{-(s-c)b}}{-(s-c)}}_{\to 0 \text{ se } (s-c)>0} - \underbrace{\frac{Me^{-(s-c)T}}{-(s-c)}}_{\text{Valor fixo.}}.\end{aligned}$$

Para garantir a convergência quando $b \to \infty$ basta considerar $s - c > 0$.

■

Teorema 1.2 (Propriedade da Linearidade)**.** Sejam f e g funções que possuem Transformada de Laplace e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então a Equação 1.3 é satisfeita.

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\} \tag{1.3}$$

Prova: A verificação desta propriedade pode ser feita utilizando a definição da Transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^\infty \left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] e^{-st}dt \\ &= \alpha \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt}_{\mathscr{L}\{f(t)\}} + \beta \underbrace{\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt}_{\mathscr{L}\{g(t)\}} \\ &= \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\}.\end{aligned}$$

■

1.1 Transformadas Elementares

Na Tabela 1, são exibidas algumas funções e suas respectivas Transformadas de Laplace. Iremos nomeá-las de Transformadas Elementares, pois são as primeiras a serem determinadas e, além disso, auxiliam a obter as transformadas de outras funções.

Tabela 1 – Transformadas Elementares

Transformadas Elementares		
$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}$	Restrição
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > a$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > a$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \|a\|$

Prova: Agora, cada transformada apresentada na Tabela 1 é demonstrada.

➟ Seja $f(t) = 1$. De acordo com a definição (1.2) tem-se que

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty.$$

Supondo que $s > 0$ a integral imprópria converge:

$$\mathscr{L}\{1\} = (0) - \left(\frac{1}{-s}\right) = \frac{1}{s}.$$

➟ Seja $f(t) = t^n$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^n\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^n dt \\
&= (t^n)\left(\frac{e^{-st}}{(-s)}\right) - \left(nt^{n-1}\right)\left(\frac{e^{-st}}{(-s)^2}\right) + \cdots \\
&\quad + n(n-1)t^{n-2}\left(\frac{e^{-st}}{-s^3}\right) - \cdots + \left((-1)^n n! t^0\right)\left(\frac{e^{-st}}{(-s)^{n+1}}\right)\Big|_0^\infty \\
&= \left[e^{-st}\left(-\frac{t^n}{s} - \frac{nt^{n-1}}{s^2} - \frac{n(n-1)t^{n-2}}{s^3} - \cdots - \frac{n!}{s^{n+1}}\right)\right]_0^\infty
\end{aligned}
$$

Supondo que $s > 0$ a integral imprópria converge:

$$
\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = (0) - \left(-\frac{n!}{s^{n+1}}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}.
$$

➟ Seja $f(t) = e^{at}$. Então,

$$
\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt.
$$

Supondo que $s > a$ a integral imprópria converge:

$$
\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = (0) - \left(\frac{1}{a-s}\right) = \frac{1}{s-a}.
$$

➟ Seja $f(t) = \operatorname{sen}(at)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}(at)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen}(at) dt \\
&= \left(\operatorname{sen}(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{(-s)} a\cos(at) dt \\
&= \left(\operatorname{sen}(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^\infty + \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(at) dt.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}\cos(at) dt &= \left(\cos(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{(-s)}(-a)\operatorname{sen}(at) dt \\
&= \left(\cos(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^\infty - \frac{a}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}(at) dt}_{\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} = \left(\text{sen}(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^{\infty} + \frac{a}{s}\left[\left(\cos(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^{\infty} - \frac{a}{s}\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\}\right]$$

$$\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} = \left(\text{sen}(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^{\infty} + \frac{a}{s}\left(\cos(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^{\infty} - \frac{a^2}{s^2}\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\}$$

$$\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} + \frac{a^2}{s^2}\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} = \left(\text{sen}(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^{\infty} + \frac{a}{s}\left(\cos(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^{\infty}$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} = \left(\text{sen}(at)\frac{e^{-st}}{(-s)} + \frac{a}{s}\cos(at)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right)_0^{\infty}.$$

Supondo que $s > 0$ a integral imprópria converge:

$$\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right)\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left(\text{sen}(ab)\frac{e^{-sb}}{(-s)} + \frac{a}{s}\cos(ab)\frac{e^{-sb}}{(-s)}\right)}_{0}$$

$$- \left(\underbrace{\text{sen}(0)\frac{e^{-0}}{(-s)}}_{0} + \underbrace{\frac{a}{s}\cos(0)\frac{e^{-0}}{(-s)}}_{a/(-s^2)}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{s^2+a^2}{\cancel{s^2}}\right)\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} = \frac{a}{\cancel{s^2}} \Rightarrow$$

$$\mathscr{L}\{\text{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

➟ De forma equivalente, mostra-se que $\mathscr{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$.

➟ Seja $f(t) = \text{senh}(at)$. Por definição, $\text{senh}(at) = \dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$.

$$\mathscr{L}\{\text{senh}(at)\} = \mathscr{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{-at}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}a}{(s^2-a^2)} = \frac{a}{(s^2-a^2)}.$$

Para garantir as transformadas das exponenciais, precisamos supor que $s > |a|$.

➟ Equivalentemente, mostra-se que $\mathscr{L}\{\text{senh}(at)\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$.

■

Exemplo 1.2. Calcule $\mathscr{L}\{\operatorname{sen}^2(t)\}$.

Resolução: Neste exemplo é preciso utilizar uma identidade trigonométrica inicialmente, a saber, $\operatorname{sen}^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen}^2(t)\right\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{1-\cos(2t)}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathscr{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}\{\cos(2t)\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2^2} \\
&= \frac{2}{s(s^2+4)}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3. Calcule $\mathscr{L}\{t^2+6t-3\}$.

Resolução: Utilizando a linearidade, Equação (1.3), temos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t^2+6t-3\right\} &= \mathscr{L}\left\{t^2\right\} + 6\mathscr{L}\{t\} - 3\mathscr{L}\{1\} \\
&= \frac{2!}{s^3} + 6\frac{1}{s^2} - 3\frac{1}{s} \\
&= \frac{2!}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{3}{s}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.4. Calcule $\mathscr{L}\{f(t)\}$, sendo que

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & \text{, se} \quad t \in [0,\pi], \\ 0 & \text{, se} \quad t \in (\pi,\infty). \end{cases}$$

Resolução: Para determinar essa transformada não será possível usar as Transformadas Elementares. Como a função $f(t)$ é definida **por partes**, no momento, a única maneira de determinar sua transformada é utilizando a definição da Transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi e^{-st}\operatorname{sen}(t)\,dt + \cancel{\int_\pi^\infty e^{-st}(0)\,dt}.
\end{aligned}$$

Na integral não nula, aplica-se integração por partes.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \cancel{\left[\operatorname{sen}(t)\frac{e^{-st}}{(-s)}\right]_0^{\pi}} - \left[\left(\cos t\frac{e^{-st}}{(-s)^2}\right)_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{e^{-st}}{(-s)^2}\operatorname{sen}(t)dt\right]\\ &= -\left(\cos t\frac{e^{-st}}{(-s)^2}\right)_0^{\pi} - \frac{1}{s^2}\underbrace{\int_0^{\pi} e^{-st}\operatorname{sen}(t)dt}_{\mathscr{L}\{f(t)\}}.\end{aligned}$$

Resulta em:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} + \frac{1}{s^2}\mathscr{L}\{f(t)\} &= -\left(\cos t\frac{e^{-st}}{s^2}\right)_0^{\pi} \Rightarrow\\ \left(1+\frac{1}{s^2}\right)\mathscr{L}\{f(t)\} &= -\left(\cos\pi\frac{e^{-s\pi}}{s^2} - \cos 0\frac{e^{-s0}}{s^2}\right) \Rightarrow\\ \left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)\mathscr{L}\{f(t)\} &= -\left(-\frac{e^{-s\pi}}{s^2} - \frac{1}{s^2}\right) \Rightarrow\\ \left(\frac{s^2+1}{\cancel{s^2}}\right)\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{e^{-s\pi}+1}{\cancel{s^2}} \Rightarrow\\ \mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{e^{-s\pi}+1}{s^2+1}.\end{aligned}$$

1.2 Transformada Inversa de Laplace

A Transformada Inversa é definida por $\mathscr{L}^{-1}$ e possui a propriedade

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}\Big\} = f(t).$$

Tabela 2 – Transformadas Inversas Elementares

Transformadas Inversas Elementares
$\mathscr{L}\left\{1\right\} = \dfrac{1}{s} \rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$
$\mathscr{L}\left\{t^n\right\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$
$\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a} \rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$
$\mathscr{L}\left\{\text{sen}(at)\right\} = \dfrac{a}{s^2+a^2} \rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \text{sen}(at)$
$\mathscr{L}\left\{\cos(at)\right\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} \rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at)$
$\mathscr{L}\left\{\text{senh}(at)\right\} = \dfrac{a}{s^2-a^2} \rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2-a^2}\right\} = \text{senh}(at)$
$\mathscr{L}\left\{\cosh(at)\right\} = \dfrac{s}{s^2-a^2} \rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh(at)$

Teorema 1.3 (Linearidade)**.** Sejam α, $\beta \in \mathbb{R}$. Valem as identidades.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\Big\{\alpha\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} + \beta\mathscr{L}\left\{g(t)\right\}\Big\} &= \alpha\mathscr{L}^{-1}\Big\{\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}\Big\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\Big\{\mathscr{L}\left\{g(t)\right\}\Big\} \\
\mathscr{L}^{-1}\Big\{\alpha\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} + \beta\mathscr{L}\left\{g(t)\right\}\Big\} &= \alpha f(t) + \beta g(t)
\end{aligned}$$

Observação. Lembre-se que é possível usar a notação $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$. Com essa notação, o Teorema 1.3 poderia escrito como:

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\alpha F(s) + \beta G(s)\Big\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\Big\{G(s)\Big\} = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

Exemplo 1.5. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\}$.

Resolução: Antes de aplicar a transformada inversa, deve-se corrigir a expressão, conforme desenvolvido abaixo.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} &= \frac{1}{4!}\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}}_{t^4} \\ &= \frac{1}{4!}t^4.\end{aligned}$$

Exemplo 1.6. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+5}{s^2+7}\right\}$.

Resolução: Inicia-se separando a fração.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{3\frac{s}{s^2+\sqrt{7}^2} + \frac{5}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{s^2+\sqrt{7}^2}\right\} \\ &= \underbrace{3\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\sqrt{7}^2}\right\}}_{\cos(\sqrt{7}t)} + \frac{5}{\sqrt{7}}\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+\sqrt{7}^2}\right\}}_{\operatorname{sen}(\sqrt{7}t)} \\ &= 3\cos(\sqrt{7}t) + \frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}(\sqrt{7}t).\end{aligned}$$

Exemplo 1.7. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, onde $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}$.

Resolução: Com a finalidade de simplificar a expressão, este cálculo deve ser iniciado aplicando frações parciais.

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cancel{(s-1)(s+2)(s+4)}} = \frac{A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)}{\cancel{(s-1)(s+2)(s+4)}}.$$

Então,

$$1 = A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2).$$

$*$ Se $s = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(3)(5) \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{15}.$

$*$ Se $s = -2 \quad \Rightarrow \quad 1 = B(-3)(2) \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{-1}{6}.$

$*$ Se $s = -4 \quad \Rightarrow \quad 1 = C(-5)(-2) \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{1}{10}.$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{15}}{s-1} + \frac{\frac{-1}{6}}{s+2} + \frac{\frac{1}{10}}{s+4}\right\} \\
&= \frac{1}{15}\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}}_{e^{t}} - \frac{1}{6}\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}}_{e^{-2t}} + \frac{1}{10}\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}}_{e^{-4t}} \\
&= \frac{1}{15}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.8. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}$.

Resolução: Inicia-se utilizando frações parciais.

$$\begin{aligned}
\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4} \\
&= \frac{As^2(s^2+4) + Bs(s^2+4) + C(s^2+4)s^3(Ds+E)}{s^3(s^2+4)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{3s-2}{\cancel{s^3(s^2+4)}} = \frac{(A+D)s^4 + (B+E)s^3 + (C+4A)s^2 + (4B)s + 4C}{\cancel{s^3(s^2+4)}},$$

e, portanto,

$$3s - 2 = (A+D)s^4 + (B+E)s^3 + (C+4A)s^2 + (4B)s + 4C.$$

Igualando os coeficientes se obtém o seguinte sistema.

$$\begin{cases} A+D &= 0 \\ B+E &= 0 \\ C+4A &= 0 \\ 4B &= 3 \\ 4C &= -2 \end{cases}.$$

Após resolver, verifica-se que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8}, \\ B &= \frac{3}{4}, \\ C &= -\frac{1}{2}, \\ D &= -\frac{1}{8}, \\ E &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(\frac{1}{8})}{s} + \frac{(\frac{3}{4})}{s^2} - \frac{(\frac{1}{2})}{s^3} + \frac{(-\frac{1}{8}s - \frac{3}{4})}{s^2+4}\right\} \\ &= \frac{1}{8}\mathscr{L}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1!}{s^2}\right\} - \frac{1}{2(2!)}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} \\ &\quad - \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} - \frac{3}{4(2)}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{3}{8}\,\mathrm{sen}(2t). \end{aligned}$$

1.3 Transformada de uma Derivada

A Transformada de Laplace é frequentemente utilizada para resolver equações diferenciais. Um dos principais teoremas relacionados a isso é a transformação de termos derivados.

Teorema 1.4. Seja f uma função n-vezes diferencial com $f^{(m)}$ de ordem exponencial para $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Então,

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Prova: Como a função $f^{(m)}(t)$ é de ordem exponencial, então

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f^{(m)}(t) \leq \lim_{t\to\infty} e^{-st} M e^{ct} = M \lim_{t\to\infty} e^{(-s+c)t} = 0,$$

desde que $-s + c < 0$.

➟ Determinando $\mathscr{L}\{f'(t)\}$: De acordo com a definição (1.2):

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\
&= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -s e^{-st} f(t) dt \\
&= 0 - f(0) + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt}_{\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

➟ Determinando $\mathscr{L}\{f''(t)\}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t) dt \\
&= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -s e^{-st} f'(t) dt \\
&= 0 - f'(0) + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt}_{\mathscr{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f''(t)\} &= -f'(0) + s\left[sF(s) - f(0)\right] \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

➟ Determinando $\mathscr{L}\{f'''(t)\}$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'''(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'''(t)dt \\ &= \left[e^{-st} f''(t)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st} f''(t)dt \\ &= 0 - f''(0) + s\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} f''(t)dt}_{\mathscr{L}\{f''(t)\}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'''(t)\} &= -f''(0) + s\left[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right] \\ &= s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).\end{aligned}$$

Pelo princípio da indução, verifica-se que

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

■

Capítulo 2

Transformada de Laplace em EDO's

Neste capítulo, será discutido como resolver equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constante utilizando a Transformada de Laplace. O diagrama abaixo ilustra as etapas do procedimento.

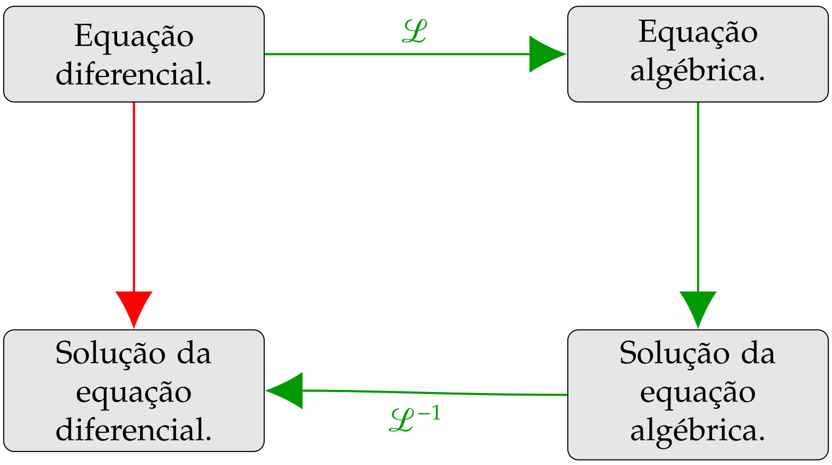

Figura 2. Processo de resolução de EDO's utilizando Transformada de Laplace.

2.1 Processo de resolução de EDO's utilizando TL

Os exemplos a seguir seguem a seguinte ordem para a resolução das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs): inicialmente, aplica-se a Transformada de Laplace em todos os termos da equação, tanto do lado esquerdo quanto do lado direito; em seguida, utiliza-se a propriedade de linearidade para isolar a Transformada $Y(s)$ da solução desconhecida; por fim, aplica-se a Transformada Inversa de Laplace para obter a expressão de $y(t)$. Geralmente, este último passo é o mais desafiador, requerendo cuidado e aplicação das regras estudadas nas seções anteriores.

Exemplo 2.1. Resolva o seguinte problema de valor inicial (PVI) utilizando a transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Resolução: A resolução inicia aplicando a Transformada de Laplace na equação diferencial.

$$\mathcal{L}\{y'(t) - y(t)\} = \mathcal{L}\{1\}.$$

Utilizamos a propriedade da linearidade

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{1\}.$$

As transformadas são calculadas em cada termo.

$$sY(s) - 0 - Y(s) = \frac{1}{s},$$

$$(s-1)Y(s) = \frac{1}{s}.$$

A função transformada $Y(s)$ é isolada.

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)s}.$$

A técnica de frações parciais é utilizada.

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)} = \frac{A(s-1)+Bs}{s(s-1)},$$

consequentemente,

$$1 = A(s-1) + Bs.$$

Quando $s = 1$, $B = 1$. Quando $s = 0$, $A = -1$. Portanto,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{(s-1)},$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{-1}{s} + \frac{1}{(s-1)}.$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s} + \frac{1}{(s-1)}\right\} \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} \Rightarrow \\ y &= -1 + e^{t}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Resolva o seguinte problema de valor inicial (PVI) utilizando a transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y''(t) - 9y(t) = 0, \\ y(0) = 5, \\ y'(0) = -3. \end{cases}$$

Resolução: A resolução inicia aplicando a Transformada de Laplace na equação diferencial.

$$\mathscr{L}\left\{y''(t) - 9y(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{0\right\}.$$

Utilizamos a propriedade da linearidade

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)\right\} - 9\mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{0\right\}.$$

Em cada termo, são efetuadas as transformadas.

$$s^2Y(s) - y(0)s + y'(0) - 9Y(s) = 0 \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - 5s + 3 - 9Y(s) = 0 \Rightarrow$$

$$(s-9)Y(s) = 5s - 3.$$

A função transformada $Y(s)$ é isolada.

$$Y(s) = \frac{5s-3}{(s^2-9)} = \frac{5s-3}{(s-3)(s+3)}.$$

A técnica de frações parciais é utilizada.

$$\frac{5s-3}{(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s+3)}.$$

Efetuando os cálculos obtemos que $A = 2$ e $B = 3$. Portanto,

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{3}{(s+3)}.$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace, obtemos:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\}.$$

Por fim,

$$y(t) = 2e^{3t} + 3e^{-3t}.$$

Exemplo 2.3. Resolva o seguinte problema de valor inicial (PVI) utilizando a transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-4t}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 5. \end{cases}$$

<u>**Resolução:**</u> Aplicamos a Transformada de Laplace na equação diferencial.

$$\mathcal{L}\left\{y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-4t}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} - 3\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} + 2\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-4t}\right\} \Rightarrow$$

$$[s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{5}] - 3[sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1}] + 2Y(s) = \frac{1}{s+4}.$$

Isolamos a função transformada $Y(s)$.

$$\left[s^2Y(s) - s - 5\right] - 3\left[sY(s) - 1\right] + 2Y(s) = \frac{1}{s+4} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - s - 5 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = \frac{1}{s+4} \Rightarrow$$

$$\left(s^2 - 3s + 2\right)Y(s) - s - 2 = \frac{1}{s+4} \Rightarrow$$

$$(s-1)(s-2)Y(s) = (s+2) + \frac{1}{s+4} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{(s+2)}{(s-1)(s-2)} + \frac{1}{(s-1)(s-2)(s+4)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}.$$

A função racional, expressão à direita da última equação, é reescrita utilizando frações parciais. Este é um processo trabalhoso.

$$Y(s) = \frac{-\frac{16}{5}}{s-1} + \frac{\frac{25}{6}}{s-2} + \frac{\frac{1}{30}}{s+4}.$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{16}{5}}{s-1} + \frac{\frac{25}{6}}{s-2} + \frac{\frac{1}{30}}{s+4}\right\} \\ &= -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \Rightarrow \\ y(t) &= -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.4. Resolva o PVI usando a Transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) = 6e^{3t} - 3e^{-t}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

<u>**Resolução:**</u>

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 4\mathcal{L}\{y'(t)\} = 6\mathcal{L}\left\{e^{3t}\right\} - 3\mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{-1} - 4[sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1}] = 6\frac{1}{s-3} - 3\frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - s + 1 - 4sY(s) + 4 = \frac{6}{s-3} - \frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

$$(s^2 - 4s)Y(s) = s - 5 + \frac{6}{s-3} - \frac{3}{s+1} \Rightarrow$$

Com a função transformada Y isolada, devemos manipular (ajustar) a expressão para que seja possível obter a inversa.

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s - 5 + \frac{6}{s-3} - \frac{3}{s+1}}{s^2 - 4s} \\
&= \frac{(s-5)(s-3)(s+1) + 6(s+1) - 3(s-3)}{(s^2-4s)(s-3)(s+1)} \\
&= \frac{s^3 - 7s^2 + 10s + 30}{(s^2-4s)(s-3)(s+1)} \\
&= \frac{11}{10}\left(\frac{1}{s-4}\right) - 2\left(\frac{1}{s-3}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\
&= \frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando a inversa, obtemos a função y.

$$y(t) = \frac{11}{10}e^{4t} - 2e^{3t} + \frac{5}{2} - \frac{3}{5}e^{-t}.$$

2.2 Resolvendo um Sistema de EDO's com TL

Para resolver um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) utilizando a Transformada de Laplace, o procedimento segue uma abordagem semelhante à seção anterior: inicialmente, aplica-se a Transformada de Laplace em todos os termos das equações, tanto do lado esquerdo quanto do lado direito; em seguida, é necessário resolver o sistema resultante, isto é, isolar uma das Transformadas, seja $Y(s)$ ou $X(s)$, das soluções desconhecidas; por fim, aplica-se a Transformada Inversa de Laplace para obter a expressão de $y(t)$ ou $x(t)$.

É importante notar que ao escolher isolar $Y(s)$, por exemplo, obtém-se a solução $y(t)$. O processo de resolução do sistema só está completo quando ambas as funções incógnitas são encontradas. Não há uma única maneira de determinar $x(t)$. Por exemplo, é possível retornar ao sistema original, substituindo a solução $y(t)$ e suas derivadas, e, em seguida, resolver para $x(t)$; ou resolver diretamente para $X(s)$ e repetir o procedimento descrito no parágrafo anterior. Veja os exemplos a seguir para uma melhor compreensão.

Exemplo 2.5. Resolva o PVI

$$\begin{cases} x' &= 2x - 2y \\ y' &= -3x + y \end{cases},$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned} x(0) &= 5 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}.$$

Resolução: Iniciamos aplicando a transformada de Laplace.

$$\mathscr{L}\{x'\} = \mathscr{L}\{2x - 2y\},$$
$$\mathscr{L}\{y'\} = \mathscr{L}\{-3x + y\}.$$

Modificando a notação.

$$sX - x(0) = 2X - 2Y,$$
$$sY - y(0) = -3X + Y.$$

Substituímos as respectivas condições iniciais.

$$\begin{aligned} sX - 5 &= 2X - 2Y, \\ sY &= -3X + Y. \end{aligned}$$

Agora, isolamos as funções transformadas X e Y.

$$\begin{aligned} (s-2)X &= -2Y + 5, \\ (s-1)Y &= -3X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{-2Y+5}{(s-2)}, \\ Y &= -3\frac{X}{(s-1)}, \end{aligned}$$

$$X = \frac{-2Y+5}{(s-2)}, \tag{2.1}$$

$$Y = -3\frac{X}{(s-1)}. \tag{2.2}$$

Substituindo Equação 2.2 na Equação 2.1, obtemos

$$X = \frac{-2Y+5}{(s-2)} = \frac{-2\left(-3\frac{X}{(s-1)}\right)+5}{(s-2)} = \frac{6X+5(s-1)}{(s-1)(s-2)} \Rightarrow$$

$$X(s-1)(s-2) = 6X + 5(s-1) \Rightarrow [(s-1)(s-2)-6]\,X = 5(s-1) \Rightarrow$$

$$X = \frac{5(s-1)}{(s-1)(s-2)-6} \Rightarrow X = \frac{5(s-1)}{(s+1)(s-4)}.$$

Aplicando frações parciais obtemos que

$$X = \frac{3}{(s-4)} + \frac{2}{(s+1)}.$$

Por fim, aplicamos a inversa:

$$\mathscr{L}^{-1}\{X\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-4)}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)}\right\},$$

e obtemos

$$x(t) = 3e^{4t} + 2e^{-t}.$$

Para descobrir $y(t)$ usaremos a primeira equação do sistema, isto é, $x' = 2x - 2y$.

$$\begin{aligned} y(x) &= x - \frac{1}{2}x' \\ &= 3e^{4t} + 2e^{-t} - \frac{1}{2}\left(3e^{4t} + 2e^{-t}\right)' \\ &= 3e^{-t} - 3e^{4t}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.6. Resolve o PVI

$$\begin{cases} 2x'' &= -6x + 2y \\ y'' &= 2x - 2y + 40\,\text{sen}(3t) \end{cases},$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ x'(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Resolução: Primeiramente, aplicando a Transformada de Laplace no sistema.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{2x''\} &= \mathcal{L}\{-6x + 2y\}, \\ \mathcal{L}\{y''\} &= \mathcal{L}\{2x - 2y + 40\,\text{sen}(3t)\}. \end{aligned}$$

Aplicamos a linearidade e substituímos as derivadas transformadas.

$$\begin{aligned} 2\left(s^2X - sx(0) - x'(0)\right) &= -6X + 2Y, \\ s^2Y - sy(0) - y'(0) &= 2X - 2Y + 40\frac{3}{s^2 + 3^2}. \end{aligned}$$

Substitímos as condições iniciais.

$$\begin{aligned} 2s^2X &= -6X + 2Y, \\ s^2Y &= 2X - 2Y + \frac{120}{s^2 + 9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2s^2 + 6)X &= 2Y, \\ (s^2 + 2)Y &= 2X + \frac{120}{s^2 + 9}, \end{aligned}$$

$$X = \frac{2}{(2s^2 + 6)}Y, \tag{2.3}$$

$$Y = \frac{2X}{(s^2 + 2)} + \frac{120}{(s^2 + 9)(s^2 + 2)}. \tag{2.4}$$

Substituímos Y da Equação 2.4 em X da Equação 2.3.

$$X = \frac{2}{(2s^2+6)} Y \Rightarrow$$

$$X = \frac{2}{(2s^2+6)} \left[\frac{2X}{(s^2+2)} + \frac{120}{(s^2+9)(s^2+2)} \right] \Rightarrow$$

$$X = \frac{2}{(2s^2+6)} \frac{2X}{(s^2+2)} + \frac{2}{(2s^2+6)} \frac{120}{(s^2+9)(s^2+2)} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{4}{(2s^2+6)(s^2+2)}\right) X = \frac{240}{(2s^2+6)(s^2+9)(s^2+2)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{(2s^2+6)(s^2+2)-4}{(2s^2+6)(s^2+2)}\right) X = \frac{240}{(2s^2+6)(s^2+9)(s^2+2)} \Rightarrow$$

$$X = \frac{240\cancel{(2s^2+6)(s^2+2)}}{[(2s^2+6)(s^2+2)-4]\cancel{(2s^2+6)}(s^2+9)\cancel{(s^2+2)}} \Rightarrow$$

$$X = \frac{240}{[(2s^2+6)(s^2+2)-4](s^2+9)} = \frac{120}{[(s^2+3)(s^2+2)-2](s^2+9)}.$$

Usando frações parciais

$$X = \frac{5}{s^2+1^2} - \frac{8}{s^4+2^2} + \frac{3}{s^2+3^3}.$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace,

$$\mathscr{L}^{-1}\{X\} = 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1^2}\right\} - 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^4+2^2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^3}\right\},$$

isto é,

$$x(t) = 5\,\text{sen}(t) - 4\,\text{sen}(2t) + \text{sen}(3t).$$

Para encontrar a função y podemos utilizar a primeira equação do sistema, ou seja, a equação $2x'' = -6x + 2y$. Isolando y, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= x'' + 3x \\ &= (5\,\text{sen}(t) - 4\,\text{sen}(2t) + \text{sen}(3t))'' + 3\,(5\,\text{sen}(t) - 4\,\text{sen}(2t) + \text{sen}(3t)) \\ &= 10\,\text{sen}(t) + 4\,\text{sen}(2t) - 6\,\text{sen}(3t). \end{aligned}$$

2.3 Resolvendo uma EDP Linear com TL

É possível utilizar a Transformada de Laplace para resolver Equações Diferenciais Parciais (EDPs) Lineares. Seja u uma função que depende das variáveis x e t; sua Transformada de Laplace é definida por

$$\mathscr{L}\left\{u(x,t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt.$$

Já vimos que ao resolver uma EDO utilizando Transformada de Laplace, o problema se ruduz a resolver uma equação algébrica. No caso das EDPs Lineares, ao aplicar a Transformada de Laplace na equação, reduzimos o problema ao de resolver uma EDO. Para isso, é necessário conhecer como fica a Transformada de Laplace das derivadas parciais de uma função.

Aplicando a Transformada da Derivada em relação à variável t, utilizamos a mesma ideia do Teorema 1.4 para transformar as derivadas parciais de ordem n. Escrevendo $\mathscr{L}\left\{u(x,t)\right\} = U(x,s)$, temos:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u^n}{\partial t^n}\right\} = s^nU(x,s) - s^{n-1}u(x,0) - s^{n-2}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - \cdots - s\frac{\partial^{n-2}u}{\partial t^{n-2}}(x,0) - \frac{\partial^{n-1}u}{\partial t^{n-1}}(x,0)$$

Assim, em particular, temos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= sU(x,s) - u(x,0)\\ \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} &= s^2U(x,s) - su(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\end{aligned}$$

Por outro lado, com relação à variável x a transformação é mais simples, pois como a Transformada de Laplace é definida em relação à variável t, a ordem entre derivar em relação à x ou calcular a Transformada não importa.

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(U(x,s)\right)$$

Prova:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)dt = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt\right).$$

■

Exemplo 2.7. Resolva a EDP $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, para $t > 0$ e $o < x < 1$ segundo as condições de contorno $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ e $u_t(x, 0) = \text{sen}(\pi x)$.

Resolução: Primeiramente, transformamos ambos os lados da equação:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(U(x,s)\right) = s^2 U(x,s) - su(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U = s^2 U - s \cdot 0 - sen(\pi x) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U - s^2 U = -sen(\pi x).$$

Assim, precisamos resolver a EDO (considerando x como varável independente):

$$U'' - s^2 U = -\text{sen}(\pi x).$$

A solução da equação homogênea associada é encontrada resolvendo a equação característica associada, uma vez que trata-se de uma EDO de segunda ordem, linear, com coeficientes constantes. A equação característica associada fica $\lambda^2 - s^2 = 0$, de onde vêm que $\lambda = \pm s$. Então, temos

$$U_h(x,s) = C_1 e^{sx} + C_2 e^{-sx}.$$

Para encontrar a solução particular, podemos utilizar o método dos coeficientes à determinar.

$$U_p = A\,\text{sen}(\pi x) + B\cos(\pi x),$$
$$U_p' = \pi A\cos(\pi x) - \pi B\,\text{sen}(\pi x),$$
$$U_p'' = -(\pi)^2 A\,\text{sen}(\pi x) - (\pi)^2 B\cos(\pi x),$$

Substituindo na EDO $U'' - s^2 U = -\text{sen}(\pi x)$, temos:

$$(-A\pi^2 - s^2 A)\,\text{sen}(\pi x) + (-B\pi^2 - s^2 B)\cos(\pi x) = -\text{sen}(\pi x).$$

Comparando os coeficientes dos termos semelhantes temos

$$-A\pi^2 - s^2 A = -1,$$
$$-B\pi^2 - s^2 B = 0.$$

A solução desse sistema é $B = 0$ e $A = \dfrac{1}{s^2 + \pi^2}$.

Portanto,

$$U_p(x,s) = \frac{1}{s^2+\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x).$$

A solução geral da EDO $U'' - s^2U = -\operatorname{sen}(\pi x)$ é

$$U(x,s) = C_1e^{sx} + C_2e^{-sx} + \frac{1}{s^2+\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x).$$

Como as condições de contorno são funções de t, temos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{u(0,t)\} &= U(0,s) = 0,\\ \mathscr{L}\{u(1,t)\} &= U(1,s) = 0.\end{aligned}$$

Substituindo na solução, podemos determinar que as constantes C_1 e C_2 são nulas e a solução particular será

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2+\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x).$$

Para determinar a função $u(x,t)$, solução da EDO proposta, aplicaremos a Transformada Inversa de Laplace:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \mathscr{L}^{-1}\{U(x,s)\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x)\right\}\\ &= \operatorname{sen}(\pi x)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\pi^2}\right\}\\ &= \operatorname{sen}(\pi x)\frac{1}{\pi}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right\}\\ &= \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{sen}(\pi t).\end{aligned}$$

Capítulo 3

Teoremas de Translação

A Transformada de Laplace, por definição, é expressa como uma integral. No entanto, calcular a integral de um produto de funções não é uma tarefa trivial e não há uma regra geral que permita fazer isso diretamente. Em disciplinas de Cálculo, costumamos recorrer a técnicas como integração por partes para facilitar esse cálculo.

Nas próximas seções, serão apresentadas técnicas que auxiliam nesse processo. Essas técnicas são ferramentas valiosas para resolver uma variedade de problemas em engenharia, física e outras áreas da matemática aplicada.

3.1 Teorema de Translação no Eixo s

Quando se deseja transformar o produto de uma função arbitrária f por uma exponencial e^{at}, o próximo teorema oferece uma ferramenta para realizar essa transformação sem recorrer à definição da Transformada de Laplace.

Teorema 3.1 (Translação no eixo s)**.** Se $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $a \in \mathbb{R}$. Então,

$$\mathscr{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a). \tag{3.1}$$

Prova:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)$$

■

Exemplo 3.1. Calcule $\mathscr{L}\left\{e^{5t}t^3\right\}$.

Resolução: Observe que $\mathscr{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4}$. Então, usando o Teorema 3.1,

$$\mathscr{L}\left\{e^{5t}t^3\right\} = \frac{3!}{(s-5)^4}.$$

Exemplo 3.2. Calcule $\mathscr{L}\left\{e^{-2t}\cos(4t)\right\}$.

Resolução: Como $\mathscr{L}\{\cos(4t)\} = \dfrac{s}{s^2+4^2}$, então usando o Teorema 3.1

$$\mathscr{L}\left\{e^{-2t}\cos(4t)\right\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}.$$

Teorema 3.2. Pelo teorema 3.1 sabemos que $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$. Aplicando a Transformada Inversa de Laplace obtemos,

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t) \tag{3.2}$$

Exemplo 3.3. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$.

Resolução: Usando frações parciais, verifica-se que

$$\frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{2}{(s-3)} + \frac{11}{(s-3)^2}.$$

A seguir, aplicando a Transformada Inversa temos que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)} + \frac{11}{(s-3)^2}\right\}\\ &= 2\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\}}_{e^{3t}} + 11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}.\end{aligned}$$

Para resolver $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}$, lembre que $\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ se, e somente se, $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$. Além disto, utilizamos os Teoremas 3.1 e 3.2.

$$\mathscr{L}\left\{e^{3t}t\right\} = \frac{1}{(s-3)^2} \Longleftrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = e^{3t}t.$$

Portanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\} + 11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = 2e^{3t} + 11e^{3t}t.$$

Exemplo 3.4. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+6}\right\}$.

Resolução: Iniciamos reescrevendo o denominador.

$$s^2+4s+6 = (s+2)^2+2$$

Ou seja,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+6}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+2}\right\}.$$

Lembramos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right\} = \cos\left((\sqrt{2})t\right)$$

e, além disso, vamos utilizar o Teorema 3.1. Obtemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2+(\sqrt{2})^2}\right\} = e^{-2t}\cos\left((\sqrt{2})t\right).$$

Retornando ao problema original

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+2}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2+2}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+2}\right\} \\
&= \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2+(\sqrt{2})^2}\right\}}_{e^{-2t}\cos\left((\sqrt{2})t\right)} - \frac{2}{\sqrt{2}}\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+(\sqrt{2})^2}\right\}}_{e^{-2t}\operatorname{sen}\left((\sqrt{2})t\right)} \\
&= e^{-2t}\cos\left((\sqrt{2}t\right) - \sqrt{2}e^{-2t}\operatorname{sen}\left((\sqrt{2})t\right).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.5. Resolva o PVI

$$\begin{cases} y''(t)+4y'(t)+6y(t) = 1-e^{-t}. \\ y(0)=0, \\ y'(0)=0. \end{cases}$$

Resolução: Iniciamos aplicando a Transformada de Laplace na EDO:

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)\right\} + 4\mathscr{L}\left\{y'(t)\right\} + 6\mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{1\right\} - \mathscr{L}\left\{e^{-t}\right\} \Rightarrow$$

$$[s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0}] + 4[sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0}] + 6Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 6Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

$$(s^2 + 4s + 6)Y(s) = \frac{\cancel{s} + 1 - \cancel{s}}{s(s+1)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 4s + 6)s(s+1)}.$$

Note que $(s^2 + 4s + 6)$ é irredutível $(\triangle < 0)$. Utilizando frações parciais

$$\frac{1}{(s^2 + 4s + 6)s(s+1)} = \frac{As + B}{s^2 + 4s + 6} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s+1}.$$

Resolvendo, obtemos $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{6}$ e $D = -\frac{1}{3}$ (Verifique!). Portanto,

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{6}s + \overbrace{\frac{1}{3}}^{=\frac{2}{6}}}{s^2 + 4s + 6} + \frac{\frac{1}{6}}{s} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+1}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2 + 2}\right] + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1}\right).$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2 + 2}\right\} + \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)}{(s+2)^2 + \sqrt{2}^2}\right\} - \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= \frac{1}{6}e^{-2t}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}e^{-t} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-2t}\cos(\sqrt{2}t). \end{aligned}$$

3.2 Função de Heaviside ou Degrau Unitário

A função de **Heaviside** ou degrau unitário, denotado por $\mathcal{U}(t)$, é definida por

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{se} \quad t \in (-\infty, 0); \\ \\ 1 \quad , & \text{se} \quad t \in [0, \infty). \end{cases}$$

O gráfico da função de Heaviside $\mathcal{U}(t)$ é apresntado na Figura 3.

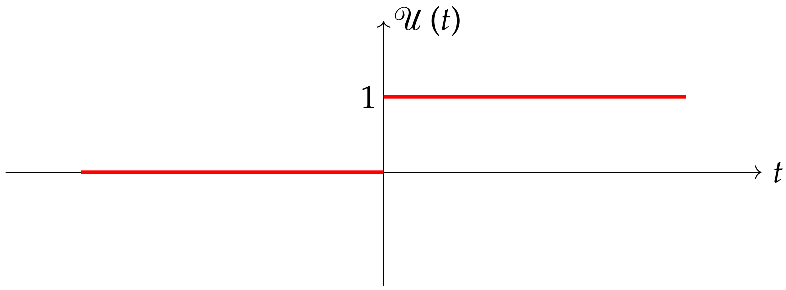

Figura 3. Gráfico da função de Heaviside.

No contexto da transformada de Laplace, essencialmente utilizamos funções cujo o domínio é não negativo. A função de Heaviside será útil quando o centro estiver deslocada para direita. Isto é, para $a > 0$ a função $\mathcal{U}(t-a)$, Figura 3.3, será de grande importância.

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{se} \quad t \in [0, a); \\ \\ 1 \quad , & \text{se} \quad t \in [a, \infty). \end{cases} \tag{3.3}$$

Veja a Figura 4.

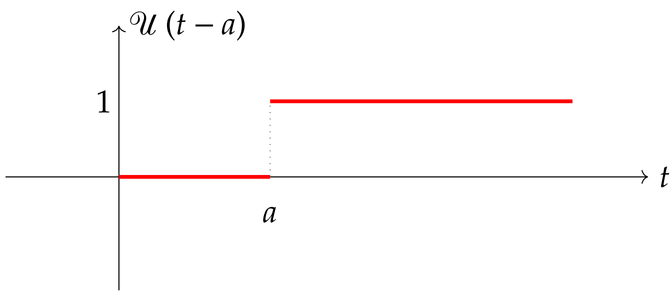

Figura 4. Gráfico da função de Heaviside deslocada $a > 0$ unidades para a direita.

➟ **A função de Heaviside será utilizada para reescrever funções por partes.**

Exemplo 3.6. Usando a função de Heaviside, reescrever a função

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se} \quad t \in [0, 3) \\ \dfrac{1}{t-3} & , \quad \text{se} \quad t \in (3, \infty) \end{cases}.$$

Resolução: Vamos analisar os gráficos das funções $\mathscr{U}(t-3)$ e $\dfrac{1}{t-3}$. Respectivamente, eles são exibidos pela Figura 5 e pela Figura 6.

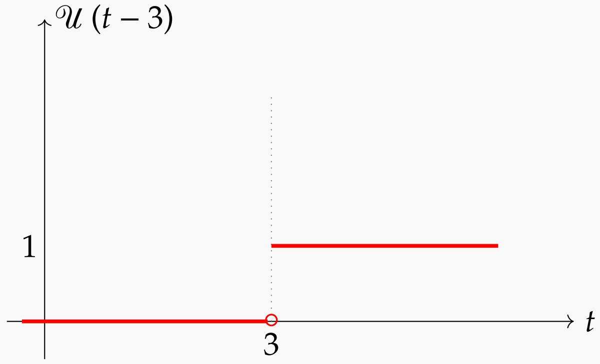

Figura 5. Gráfico de $\mathscr{U}(t-3)$.

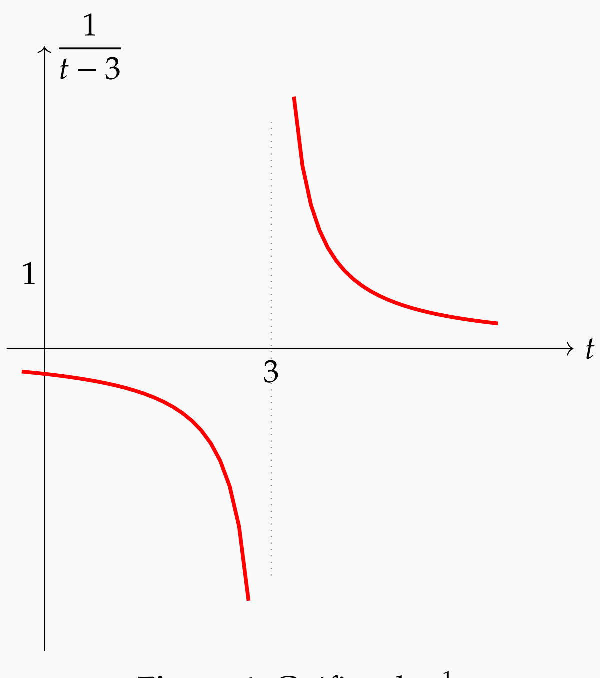

Figura 6. Gráfico de $\frac{1}{t-3}$.

Com base nos gráficos acima, conclui-se que a multiplicação entre as funções $\mathscr{U}(t-3)$ e $\dfrac{1}{t-3}$, resulta na função cujo o gráfico pode ser observado pela Figura 7.

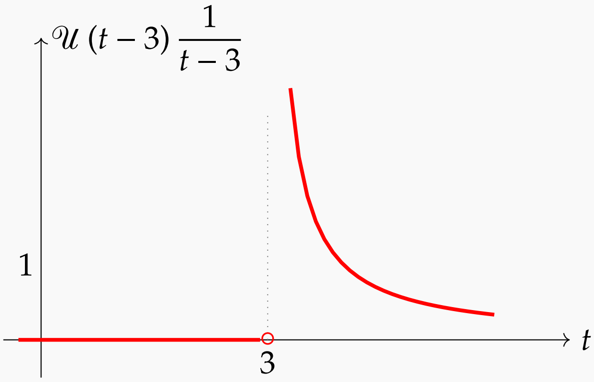

Figura 7. Gráfico de $f(t)$.

Essa função é a função f. Portanto, $f(t) = \mathcal{U}\,(t-3)\,\frac{1}{t-3}$.

Exemplo 3.7. Usando a função de Heaviside, reescrever a função

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{2} & , \quad \text{se} \quad t \in [0,4) \\ 0 & , \quad \text{se} \quad t \in [4,\infty). \end{cases}$$

Resolução: Pela definição, no intervalo $t \in [0,4)$ a função f vale $t/2$, enquanto que no intervalo $t \in [4,\infty)$ a função f vale zero.

Para reescrever a função devemos realizar o produto da função $t/2$ pela função $1 - \mathcal{U}\,(t-4)$. A Figura 8 mostra o gráfico de $\mathcal{U}\,(t-4)$, enquanto a Figura 9 mostra o gráfico de $1 - \mathcal{U}\,(t-4)$.

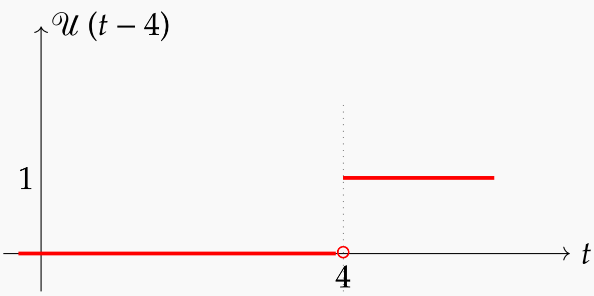

Figura 8. Gráfico de $\mathcal{U}\,(t-4)$.

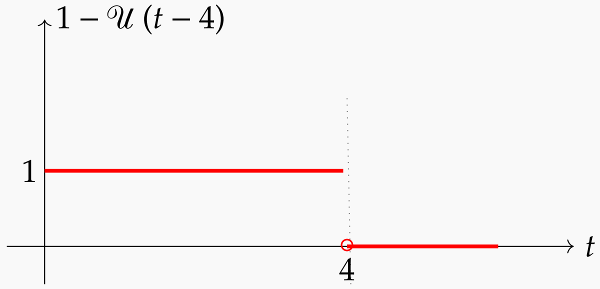

Figura 9. Gráfico de $\mathcal{U}(t-4)$.

A multiplicação da função $t/2$ pela função $[1 - \mathcal{U}(t-4)]$ é, exatamente, a função f, isto é,

$$f(t) = \frac{t}{2}\Big[1 - \mathcal{U}(t-4)\Big].$$

Veja a Figura 10.

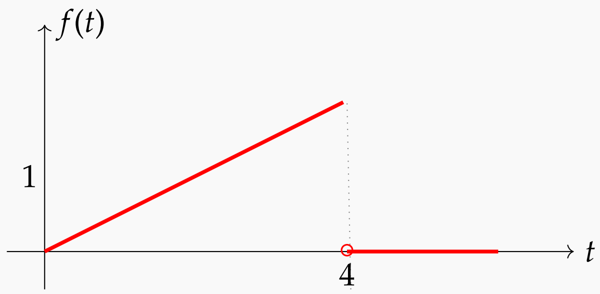

Figura 10. Gráfico de $\mathcal{U}(t-4)$.

3.3 Teorema de Translação no Eixo t

Quando desejamos transformar o produto de uma função arbitrária f por uma função degrau unitário ou função de Heaviside, o próximo teorema fornece um método para realizar essa transformação sem recorrer à definição para obter a Transformada de Laplace do produto dessas duas funções.

Teorema 3.3 (Translação em t)**.** Seja $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ e $a \in \mathbb{R}^+$. Então

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}\left(t-a\right) f(t-a)\right\} = e^{-as}F(s).$$

Prova: Vamos utilizar a definição de Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}\left(t-a\right) f(t-a)\right\} = \int_{t=0}^{t\to\infty} e^{-st}\mathcal{U}\left(t-a\right) f(t-a)dt = \int_{t=a}^{t\to\infty} e^{-st} f(t-a)dt$$

Com a mudança de variável $u = t-a$, temos que, $t = u+a$ e que $du = dt$. Substituindo:

$$\int_{u+a=a}^{u+a\to\infty} e^{-s(u+a)} f(u\cancel{+a-a})du = e^{-sa}\int_{u=0}^{u\to\infty} e^{-su} f(u)du.$$

Renomeando por t a variável muda u, segue que

$$e^{-sa}\int_{t=a}^{t\to\infty} e^{-st} f(t)dt = e^{-sa}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = e^{-sa}F(s).$$

■

Exemplo 3.8. Calcule $\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}\left(t-\pi\right)\operatorname{sen}(t)\right\}$.

Resolução: Iniciamos observando que $\operatorname{sen}(t-\pi) = f(t-\pi)$. Portanto, $f(t) = \operatorname{sen}(t)$ e consequentemente $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$. Assim, utilizando o Teorema 3.3, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}\left(t-\pi\right)\operatorname{sen}(t)\right\} &= -\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}\left(t-\pi\right)\operatorname{sen}(t-\pi)\right\}\\ &= -e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Exemplo 3.9. Calcule $\mathscr{L}\left\{e^{2-t}\mathscr{U}(t-2)\right\}$.

Resolução: Note que se $e^{-(t-2)} = f(t-2)$, então $f(t) = e^{-t}$ e consequentemente $F(s) = \dfrac{1}{s+1}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{e^{2-t}\mathscr{U}(t-2)\right\} &= \mathscr{L}\left\{e^{-(t-2)}\mathscr{U}(t-2)\right\} = e^{-2s}\frac{1}{s+1} \\
&= e^{-2s}\frac{1}{s+1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.10. Calcule $\mathscr{L}\left\{(3t+1)\mathscr{U}(t-1)\right\}$.

Resolução: Note que

$$\begin{aligned}
f(t-1) &= 3(t-1)+4 \Rightarrow \\
f(t) &= 3t+4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} \\
&= \mathscr{L}\left\{3t+4\right\} \\
&= 3\frac{1}{s^2} + 4\frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\mathscr{L}\left\{(3t+1)\mathscr{U}(t-1)\right\} = e^{-s}\left(\frac{3}{s^2} + \frac{4}{s}\right).$$

Teorema 3.4. Pelo Teorema 3.3

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)\mathcal{U}\left(t-a\right)\right\} = e^{-as}F(s).$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace, obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)\mathcal{U}\left(t-a\right).$$

Exemplo 3.11. Resolva a Transformada Inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s-4}\right\}.$$

<u>**Resolução:**</u> Como $e^{-as} = e^{-2s}$, então $a = 2$. Agora, como

$$F(s) = \frac{1}{s-4}$$

temos que

$$f(t) = e^{4t},$$

e, além disso,

$$f(t-a) = f(t-2) = e^{4(t-2)}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s-4}\right\} = e^{4(t-2)}\mathcal{U}\left(t-2\right).$$

Exemplo 3.12. Resolva a Transformada Inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+9}\right\}.$$

<u>**Resolução:**</u> Como $e^{-as} = e^{-\frac{\pi}{2}s}$, então $a = \frac{\pi}{2}$. Agora, como

$$F(s) = \frac{s}{s^2+9} \implies f(t) = \cos(3t)$$

e

$$f(t-\frac{\pi}{2}) = \cos\left(3(t-\frac{\pi}{2})\right).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos\left(3t-\frac{3\pi}{2}\right)\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

Exemplo 3.13. Resolva o PVI

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = f(t), \\ y(0) = 5, \end{cases}$$

no qual

$$f(t) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{se} \quad t \in [0, \pi), \\ 3\,\text{sen}(t) \quad , & \text{se} \quad t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Resolução: Observe que a função $f(t)$ pode ser reescrita como

$$f(t) = 3\,\text{sen}(t)\mathcal{U}\left(t - \pi\right).$$

Logo,

$$y' + y = 3\,\text{sen}(t)\mathcal{U}\left(t - \pi\right),$$

no qual $y(0) = 5$. Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{y(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{3\,\text{sen}(t)\mathcal{U}\left(t - \pi\right)\right\} \Rightarrow \\ sY(s) - y(0) + Y(s) &= 3\mathcal{L}\left\{\text{sen}(t)\mathcal{U}\left(t - \pi\right)\right\}. \end{aligned}$$

Agora, substituímos a condição inicial.

$$sY(s) - 5 + Y(s) = 3\mathcal{L}\left\{\text{sen}(t)\mathcal{U}\left(t - \pi\right)\right\}. \tag{3.4}$$

No exemplo dado em (3.8), foi verificado que

$$\mathcal{L}\left\{\text{sen}(t)\mathcal{U}\left(t - \pi\right)\right\} = -e^{-\pi s}\frac{1}{s^2 + 1}.$$

Substituindo na Equação 3.4, temos

$$\begin{aligned} sY(s) - 5 + Y(s) &= -3e^{-\pi s}\frac{1}{s^2 + 1} \\ Y(s)(s + 1) - 5 &= -3\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \\ Y(s) &= -3e^{-\pi s}\frac{1}{(s^2 + 1)(s + 1)} + \frac{5}{s + 1}. \end{aligned}$$

Usando frações parciais se estabelece que

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s + 1)} = \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(s + 1)}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= -3e^{-\pi s}\left[\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(s+1)}\right]+\frac{5}{s+1}\\
&= \frac{3}{2}e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{2}e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}-\frac{3}{2}e^{-\pi s}\frac{1}{s+1}+\frac{5}{s+1}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a transformada inversa, temos:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}\right\}-\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}\right\}-\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\frac{1}{s+1}\right\}+5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\\
&= \frac{3}{2}\cos(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi)-\frac{3}{2}\operatorname{sen}(t-\pi)\mathscr{U}(t-\pi)-\frac{3}{2}e^{t-\pi}\mathscr{U}(t-\pi)+5e^{-t}\\
&= \left[\frac{3}{2}\cos(t-\pi)-\frac{3}{2}\operatorname{sen}(t-\pi)-\frac{3}{2}e^{-(t-\pi)}\right]\mathscr{U}(t-\pi)+5e^{-t}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Outras propriedades

Neste capítulo, iremos explorar algumas transformadas especiais. Estas transformadas são mais elaboradas e têm o objetivo de ampliar a variedade de problemas que podem ser resolvidos utilizando a Transformada de Laplace.

4.1 Derivada da Transformada de Laplace

Quando se pretende transformar o produto de uma função qualquer f por uma função polinomial do tipo t^n, o próximo teorema fornece um método para realizar isso sem recorrer à definição para obter a Transformada de Laplace do produto dessas duas funções.

Teorema 4.1. Seja $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Para todo $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ vale a equação

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \mathscr{L}\{t^n f(t)\}.$$

Prova: Conseguimos obter a demostração utilizando a definição.

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{ds^n}F(s) &= \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d^n}{ds^n}e^{-st}f(t)dt \\
&= \int_0^\infty (-t)^n e^{-st}f(t)dt \\
&= (-1)^n \int_0^\infty e^{-st}\left(t^n f(t)\right)dt \\
&= (-1)^n \mathscr{L}\{t^n f(t)\}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.1. Calcule a transformada de Laplace $\mathscr{L}\left\{t^2 \operatorname{sen}(7t)\right\}$.

Resolução: Pelo Teorema (4.1),

$$\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Consideramos o caso particular $n = 2$.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{t^2 \operatorname{sen}(7t)\right\} &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{7}{s^2+7^2}\right)\\ &= \frac{14(3s^2-7^2)}{(s^2+7^2)^3}.\end{aligned}$$

Exemplo 4.2. Calcule a transformada de Laplace $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4^2)^2}\right\}$.

Resolução: Do Teorema 4.1, com $n = 1$,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\} = -tf(t). \tag{4.1}$$

Por comparação, identificamos que

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{s}{(s^2+4^2)^2},$$

isto é,

$$\begin{aligned}F(s) &= \int \frac{s}{(s^2+4^2)^2} ds\\ &= \frac{-1}{2(s^2+4^2)}.\end{aligned}$$

E, além disso, como

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{-1}{2(s^2+4^2)} \Rightarrow\\ f(t) &= -\frac{1}{8}\mathscr{L}\left\{\frac{4}{s^2+4^2}\right\}\\ &= -\frac{1}{8}\operatorname{sen}(4t).\end{aligned}$$

Substituindo na Equação 4.1, obtemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4^2)^2}\right\} &= -tf(t)\\ &= -t\left(-\frac{1}{8}\operatorname{sen}(4t)\right)\\ &= \frac{t}{8}\operatorname{sen}(4t).\end{aligned}$$

Exemplo 4.3. Resolva o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y'' + 16y = \cos(4t),\\ y(0) = 0,\\ y'(0) = 1.\end{cases}$$

Resolução: Seja $Y = \mathscr{L}\{y\}$. Aplicando a transformada de Laplace na EDO, temos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y''\} + 16\mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{\cos(4t)\} \Rightarrow\\ s^2Y - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=1} + 16Y &= \frac{s}{s^2+4^2} \Rightarrow\\ s^2Y - 1 + 16Y &= \frac{s}{s^2+4^2} \Rightarrow\\ (s^2+16)Y &= \frac{s}{s^2+4^2} + 1 \Rightarrow\\ Y &= \frac{s}{(s^2+4^2)^2} + \frac{1}{s^2+4^2}.\end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4^2)^2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4^2}\right\}\\ y(t) &= \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4^2)^2}\right\}}_{\text{exercício anterior}} + \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4^2}\right\}\\ y(t) &= \frac{t}{8}\operatorname{sen}(4t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t).\end{aligned}$$

4.2 Convolução

Vamos começar esta seção definindo o operador de convolução. Este operador possui propriedades importantes e contribui para alcançarmos resultados significativos.

Definição 4.1. Sejam f e g funções contínuas por partes em $[0, \infty)$. Definimos a convolução $f(t) * g(t)$ por

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

➟ **Propriedade**: Uma propriedade importante da convolução é a comutatividade, ou seja, é verdade que

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t).$$

Prova: Pela definição,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Fazendo $\tilde{\tau} = t - \tau$ temos $d\tilde{\tau} = -d\tau$. Além disso, decorrem as seguintes mudanças:

➪ se $\tau = 0$ então $\tilde{\tau} = t$;

➪ se $\tau = t$ então $\tilde{\tau} = 0$;

➪ como $\tilde{\tau} = t - \tau$ então $\tau = t - \tilde{\tau} = t$;

Logo,

$$f(t) * g(t) = \int_t^0 f(t-\tilde{\tau})g(\tilde{\tau})(-d\tilde{\tau}) = \int_0^t g(\tilde{\tau})f(t-\tilde{\tau})d\tilde{\tau} = g(t) * f(t).$$

■

4.3 Transformada da Convolução

O seguinte teorema mostra uma propriedade que é extremamente útil na resolução de equações diferenciais lineares. Permite que as técnicas da transformada de Laplace sejam aplicadas para resolver problemas complexos de forma mais simples e direta.

Teorema 4.2. Sejam f e g funções definidas em $[0, \infty)$ e que possuam transformada de Laplace. Então,

$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s).$$

Prova:

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \int_0^{\infty} e^{-s\beta} g(\beta)d\beta.$$

Podemos juntar as integrais conforme ilustrado a seguir.

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)d\beta \right) d\tau.$$

Na integral interior, que está em destaque, faremos a seguinte substituição de variáveis:

$$t = \tau + \beta.$$

O objetivo é reescrever β em função de t. Obtemos:

- ➩ $t = \tau + \beta \Longrightarrow \beta = t - \tau;$
- ➩ $dt = d\beta$
- ➩ $\beta = 0 \Longrightarrow t = \tau;$
- ➩ $\beta \to \infty \Longrightarrow t \to \infty.$

Obtemos o seguinte resultado ao substituindo na integral.

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)dt \right) d\tau.$$

Observação: Como a função g está definida apenas na parte positiva, então $g(t-\tau)$ implica que $t - \tau > 0$, ou seja, que $t > \tau$. Se observarmos o plano $t \times \tau$ veremos que a área referente a região de integração é a seguinte (Figura 11):

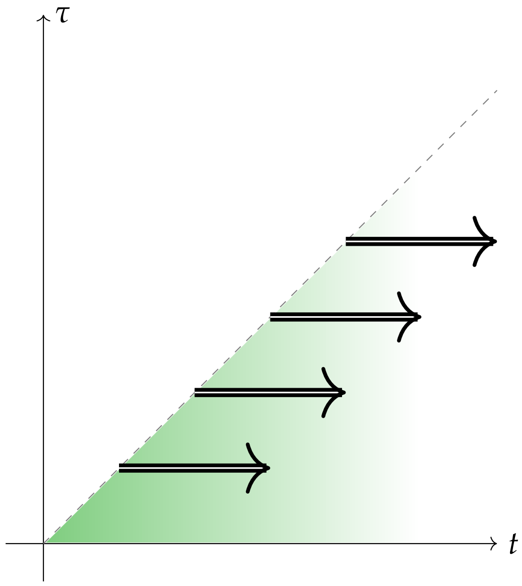

Figura 11. Área referente a região de integração.

O que acontece aqui é que estamos integrando a função $e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)$ na área em destaque. Na maneira que estão dispostas as integrais, podemos pensar que para cada altura fixa τ temos a variação em t no intervalo (τ, ∞). Entretanto, para obter o resultado que queremos, será necessário modificar a maneira de obter essa área de integração. Pelas condições do problema, o Teorema de Fubini assegura ser possível a troca de ordem de integração. Observe Figura 12:

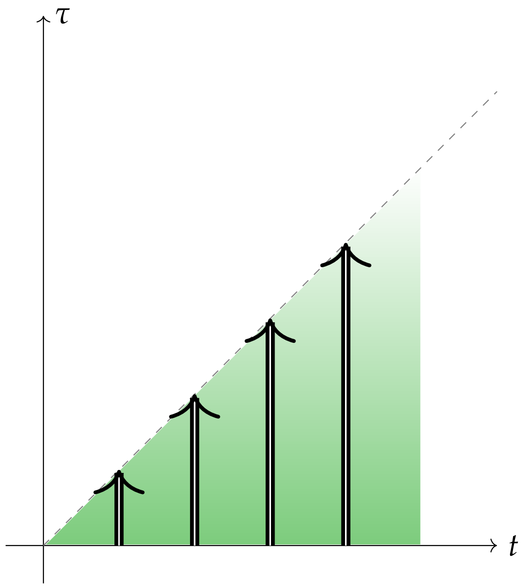

Figura 12. Área referente a região de integração aplicando o Teorema de Fubini.

Trocando a ordem de integração, agora por fora teremos a integral em t. Observe que a variação de t agora será de 0 ao ∞, e que para cada t fixado a variável τ tem que partir de 0 e chegar em t. Assim,

$$\int_0^{\infty}\left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)dt\right)d\tau = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{t} e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt.$$

A expreessão e^{-st} é constante com relação a τ, podendo sair da integral em τ.

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\underbrace{\left(\int_0^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)}_{f(t)*g(t)}dt.$$

Analisando com atenção, percebemos que essa é a definição de Transformada de Laplace aplicada a convolução $f(t)*g(t)$. Isto é,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)*g(t)dt = \mathscr{L}\left\{f(t)*g(t)\right\}.$$

■

Exemplo 4.4. Calcule $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau\right\}$.

Resolução: Veja que

$$\int_0^t e^{\tau}\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau = e^t * \operatorname{sen}(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau\right\} &= \mathscr{L}\left\{e^t * \operatorname{sen}(t)\right\}\\
&= \mathscr{L}\left\{e^t\right\}\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen}(t)\right\}\\
&= \left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}.
\end{aligned}$$

4.4 Forma Inversa da Transformada de Convolução

A Transformada de Laplace da convolução também pode ser revertida aplicando a Transformada Inversa de Laplace.

Teorema 4.3. Aplicando a Transformada Inversa de Laplace no resultado obtido no Teorema (4.2), obtemos

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t).$$

Exemplo 4.5. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-1)}\right\}$.

Resolução: Identificamos as funções $F(s)$ e $G(s)$ do Teorema 4.3. Neste problema, temos $F(s) = 1/s^2$ e $G(s) = 1/(s-1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)\right\} &= t * e^t \\
&= e^t * t \\
&= \int_0^t e^\tau (t-\tau)d\tau \\
&= [(t-\tau)e^\tau]_0^t + [e^\tau]_0^t \\
&= (0-t) + (e^t - 1) \\
&= -t + e^t - 1.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.6. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$.

Resolução: Neste problema temos que $F(s) = G(s) = 1/(s^2+1)$. Assim,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\frac{1}{(s^2+1)}\right\} = \operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau$$

Para resolver essa integral, vamos modificar o integrando utilizando relações trigonométricas. Como

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B), \tag{4.2}$$

$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B), \tag{4.3}$$

subtraindo Equação 4.2 da Equação 4.3, obtemos

$$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}. \tag{4.4}$$

Identificando $A = \tau$ e $B = t - \tau$, reescreve-se a Equação 4.4 como

$$\operatorname{sen}(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau) = \frac{\cos(\tau+t+\tau)-\cos(\tau+t-\tau)}{2}.$$

Integrando de 0 à t, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \operatorname{sen}(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau &= \int_0^t \frac{\cos(\tau-t+\tau)-\cos(\tau+t-\tau)}{2}d\tau \\
&= \frac{\int_0^t \cos(\tau-t+\tau)-\cos(\tau+t-\tau)d\tau}{2} \\
&= \frac{\int_0^t \cos(2\tau-t)d\tau - \int_0^t \cos(t)d\tau}{2} \\
&= \frac{\int_0^t \cos(2\tau-t)d\tau - \cos(t)\int_0^t d\tau}{2} \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\tau-t)\Big|_0^t - \frac{\cos(t)}{2}(\tau)\Big|_0^t \\
&= \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(t)-\operatorname{sen}(-t)] - \frac{\cos(t)}{2}[t-0] \\
&= \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}(t)] - \frac{t}{2}\cos(t) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) - \frac{t}{2}\cos(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)-t\cos(t)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{\operatorname{sen}(t)-t\cos(t)}{2}.$$

4.5 Transformada de uma Integral

Na seção anterior vimos que

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

e que

$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s).$$

Podemos, portanto, concluir que é válida a Equação 4.5.

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s) \tag{4.5}$$

Ao considerar o caso particular em que $g(t) = 1$, obtemos $g(t-\tau) = 1$ e que $G(s) = 1/s$. Substituindo em (4.5) obtemos a Equação 4.6 que representa a transformada de uma integral.

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \tag{4.6}$$

Aplicando a inversa, obtemos também a Equação 4.7.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau \tag{4.7}$$

Exemplo 4.7. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s(s^2+3^2)}\right\}$.

Resolução: Vamos utilizar a Equação 4.7. Para identificar a função $F(s)$, reescrevemos a função.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s^2+3^2)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\dfrac{3}{s^2+3^2}\right)}{s}\right\}.$$

Isto é,

$$F(s) = \frac{3}{s^2+3^2}$$

o que implica que

$$f(t) = \operatorname{sen}(3t).$$

Utilizando a Equação (4.7)

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s^2+3^2)}\right\} &= \int_0^t \operatorname{sen}(3\tau)d\tau \\
&= -\left[\frac{\cos(3t)}{3}\right]_0^t \\
&= -\frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(0)}{3} \\
&= \frac{1-\cos(3t)}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.8. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s-1)}\right\}$.

Resolução: Note que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s-1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\dfrac{1}{s^2(s-1)}}{s}\right\}.$$

Comparando com o lado esquerdo de (4.7),

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s^2(s-1)} \\
&= \frac{1}{s^2}\frac{1}{(s-1)}.
\end{aligned}$$

Aplicando a inversa e a Equação 4.3, obtemos

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{1}{(s-1)}\right\} \\
&= t * e^t \\
&= \int_0^t e^{\tau}(t-\tau)d\tau \\
&= \left[(t-\tau)e^{\tau} + e^{\tau}\right]_0^t \\
&= -t + e^t - 1.
\end{aligned}
$$

Utilizando a identidade (4.7),

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2(s-1)}}{s}\right\} &= \int_0^t (-\tau + e^{\tau} - 1)d\tau \\
&= \left[-\frac{\tau^2}{2} + e^{\tau} - \tau\right]_0^t \\
&= \left(-\frac{t^2}{2} + e^t - t\right) - (0 + 1 - 0) \\
&= -\frac{t^2}{2} + e^t - t - 1.
\end{aligned}
$$

4.6 Transformada de uma Função Periódica

Teorema 4.4. Seja f uma função periódica, de período T, que possui transformada de Laplace. Então,

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Prova: Pela definição

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\
&= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \underbrace{\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt}_{(\star)}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Fazendo a mudança de variável $\delta = t - T$, temos, consequentemente, que $d\delta = dt$. Além disso, quando $t = T$ então $\delta = 0$, quando $t \to \infty$ temos que $\delta \to \infty$ e também sabemos que $t = \delta + T$. Todas essas modificações serão utilizadas na integral $(\star)$, que é um termo da Equação 4.8. Obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt &= \int_0^\infty e^{-s(\delta+T)} f(\delta + T) d\delta \\
&= e^{-sT} \int_0^\infty e^{-s\delta} f(\delta) d\delta \\
&= e^{-sT} \underbrace{\int_0^\infty e^{-s\delta} f(\delta) d\delta}_{(\star\star)}.
\end{aligned}$$

Em $(\star\star)$ temos que δ é uma variável muda. Vamos substituí-la por t.

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Observe que a integral à esquerda é aquela que pretendemos reescrever, conforme acabamos de fazer. Portanto, substituindo em (4.8), obtemos

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Essa equação possui duas integrais idênticas. Vamos colocar em evidência.

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + e^{-sT}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \Rightarrow$$

$$(1-e^{sT})\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^T e^{-st}f(t)dt \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \frac{1}{(1-e^{-sT})}\int_0^T e^{-st}f(t)dt.$$

Por fim, basta observar que o lado esquerdo da última equação é a definição da Transformada de Laplace, conforme a Equação 1.1.

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt.$$

■

Exemplo 4.9. Considere a função f, cujo o gráfico é apresentado na Figura 13.

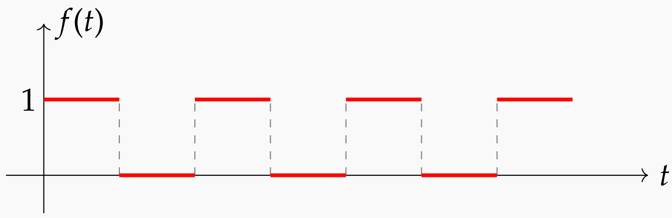

Figura 13. Gráfico da função f.

Calcule $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

Resolução: A função f é periódica, com período fundamental $T = 2$. Pelo Teorema 4.4, temos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}1dt + \cancel{\int_1^2 e^{-st}0dt}\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{1-e^{-s}}{s}\right] \\
&= \frac{1}{(1+e^{-s})\cancel{(1-e^{-s})}}\frac{\cancel{(1-e^{-s})}}{s} \\
&= \frac{1}{s(1+e^{-s})}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.10. Calcule $\mathscr{L}\Big\{|\text{sen}(t)|\Big\}$.

Resolução: A função $|\text{sen}(t)|$ é periódico de período $T = \pi$. Veja a Figura 14.

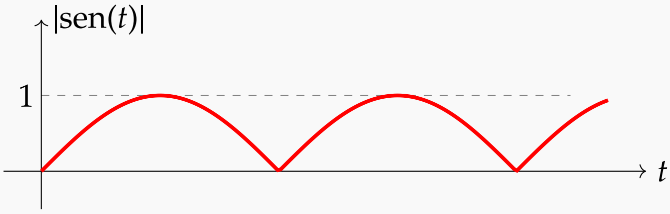

Figura 14. Gráfico de $|\text{sen}(t)|$.

Pelo Teorema 4.4, temos

$$\mathscr{L}\Big\{|\text{sen}(t)|\Big\} = \frac{1}{1-e^{-s\pi}} \int_0^{\pi} e^{-st}\,\text{sen}(t)dt.$$

Fica como exercício ao leitor verificar que

$$\int_0^{\pi} e^{-st}\,\text{sen}(t)dt = \frac{e^{-s\pi}+1}{s^2+1}.$$

Com essa identidade, obtemos que

$$\mathscr{L}\Big\{|\text{sen}(t)|\Big\} = \frac{1}{1-e^{-s\pi}}\left(\frac{e^{-s\pi}+1}{s^2+1}\right).$$

Uma alternativa mais elegante de apresentar a solução pode ser feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\Big\{|\text{sen}(t)|\Big\} &= \frac{-1}{s^2+1}\underbrace{\left(\frac{e^{-s\pi}+1}{e^{-s\pi}-1}\right)}_{\tanh(-s\pi/2)} \\ &= \frac{-1}{s^2+1}\tanh\left(-\frac{s\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Como tanh é uma função ímpar, então

$$\mathscr{L}\Big\{|\text{sen}(t)|\Big\} = \frac{1}{s^2+1}\tanh\left(\frac{s\pi}{2}\right).$$

Referências

William E Boyce, Richard C DiPrima, and Douglas B Meade. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, 2017.

James R Brannan and William E Boyce. *Differential Equations: An Introduction to Modern Methods and Applications*. John Wiley & Sons, 2015.

Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, 2010.

Joel L Schiff. *The Laplace transform: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.

Murray R Spiegel. *LaPlace transform*. Schaum's Outline Series, 1965.

Walter A Strauss. *Partial Differential Equations: An Introduction*. John Wiley & Sons, 2007.

Dennis G Zill and Michael R Cullen. *Equações diferenciais vol. 1*. Pearson Makron Books, 2008.

Dennis G Zill and Warren S Wright. *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. Cengage Learning, 2009.

EDITORA E GRÁFICA DA FURG
CAMPUS CARREIROS
CEP 96203 900
editora@furg.br

ISBN 978-65-5754-247-7
9786557542477